Gymnasium Leichlingen
03 12M Lö 2001/02.2 1/2 Aufgaben/Lösungen der Klausur Nr. **3** vom 14. März 2002
*4*45 Minuten*

A 1: a) Es sei f die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x - 3) \cdot \exp(x)$. Bestimme $p_3(x)$.

b) Berechne mit a) einen Näherungswert für f(0,2); gib eine Fehlerabschätzung an.

c) Der Graph der Funktion f schließt zusammen mit der x- und der y-Achse ein Flächenstück ein. Bestimme seinen Inhalt.

L 1: Zu a) Mit der Produktregel der Differentialrechnung erhält man

$f'(x) = 1 \cdot \exp(x) + (x - 3) \cdot \exp(x) = (x - 2) \cdot \exp(x)$; entsprechend ergibt sich:

$f''(x) = (x - 1) \cdot \exp(x)$ und $f'''(x) = x \cdot \exp(x)$.

Einsetzen von $x = 0$: $f(0) = -3$; $f'(0) = -2$; $f''(0) = -1$; $f'''(x) = 0$

Das 3. Taylorpolynom von f hat den Term $f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{6}f'''(x)\cdot x^3$.

Daher erhält man: $p_3(x) = -3 - 2x - \frac{1}{2}x^2$.

Zu b) Das Taylorpolynom zu f liefert einen Näherungswert. Nach dem Satz von Taylor gibt es im Intervall $]0; 0{,}2[$ eine Stelle ξ, für welche die folgende Gleichung gilt: $f(0{,}2) = p(0{,}2) + \frac{1}{24}\cdot f^{IV}(\xi)\cdot 0{,}2^4$.

$p(0{,}2) = -3 - 2\cdot 0{,}2 - \frac{1}{2}\,0{,}2^2 = -3{,}42$. Der Näherungswert ist also $-3{,}42$.

Wegen $f^{IV}(x) = (x+1)\cdot\exp(x)$ lässt sich abschätzen:

$\left| f(0{,}2) - p(0{,}2) \right| = \frac{1}{24}\cdot(\xi+1)\cdot\exp(\xi)\cdot 0{,}2^4 < \frac{1}{24}\cdot(0{,}2+1)\cdot\exp(0{,}2)\cdot 0{,}2^4$.

Dabei wurde die Isotonie der Exponentialfunktion und des linearen Faktors (mit positiver Steigung) ausgenutzt.

Damit kann man weiter abschätzen:

$\left| f(0{,}2) - p(0{,}2) \right| < \frac{1}{24}\cdot 1{,}2\cdot e\cdot 0{,}2^4 < \frac{1}{24}\cdot 1{,}2\cdot 3\cdot 0{,}2^4 = 0{,}00024$.

Der absolute Fehler ist also kleiner als $2{,}5\cdot 10^{-4}$.

Zu c) Wegen $\exp(x) \neq 0$ ist 3 die einzige Nullstelle von f; wegen $f(0) = -3$ schneidet der Graph von f also die beiden Koordinatenachsen nur in den Punkten $(0 \mid -3)$ und $(3 \mid 0)$.

Da die Kurve über dem Intervall $[0; 3]$ nirgends oberhalb der x-Achse verläuft, ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt A:

$A = -\int_0^3 f(x)\,dx = -\int_0^3 (x - 3)\cdot\exp(x)\,dx$

Als Stammfunktionsterm zu f(x) errät man (aufgrund der Veränderungen der Funktion beim Ableiten in Teil a) der Aufgabe) $(x - 4)\cdot\exp(x)$.

Nach dem Hauptsatz folgt $A = -\left[(x - 4)\cdot\exp(x)\right]_0^3 = \exp(3) - 4 = e^3 - 4$.

Der zu bestimmende Flächeninhalt beträgt somit ca. 16,09 Flächeneinheiten.

A 2: a) Untersuche, ob für gerades f und ungerades g (beide auf ganz $\mathbb{R}$ definiert) die Funktionen $f\cdot g$, $f \circ g$, $g \circ f$ gerade bzw. ungerade sind.

b) Zeige, dass es für jede ungerade Funktion auf einem Intervall $[-b; b]$ zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z^* mit Zwischenpunkten gibt, deren Feinheit kleiner als ε ist und deren zugehörige Riemannsche Summe den Wert 0 hat. Begründe damit, dass das Integral einer ungeraden Funktion stets null ist.

L 2: Zu a) Eine Funktion h heißt *gerade*, wenn für alle $x \in D_h$ gilt $h(-x) = h(x)$, und sie heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in D_h$ gilt $h(-x) = -h(x)$.

Der Wert an einer Stelle x wird mit dem Wert an der Stelle −x verglichen:

(i) $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot \big(-(g(x))\big) = -\big(f(x) \cdot g(x)\big) = -\big((f \cdot g)(x)\big)$,

(ii) $(f \circ g)(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x)$,

(iii) $(g \circ f)(-x) = g\big(f(-x)\big) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$.

Aus (i), (ii) und (iii) liest man ab: f·g ist ungerade, f∘g und g∘f sind gerade.

Zu b) Anstelle des nachfolgend gegebenen formalen Beweises genügt die folgende Überlegung: Eine beliebige Zerlegung mit Feinheit $< \varepsilon$ hat nach Hinzunahme aller Punkte, die durch Spiegeln der Intervallenden am Ursprung entstehen, erst recht eine Feinheit $< \varepsilon$. Wählt man nun die Zwischenpunkte so, dass sie paarweise zum Ursprung symmetrisch liegen, lassen sich in der Riemannschen Summe jeweils zwei Summanden zu null zusammenfassen, da die gemeinsame Intervallbreite mit entgegengesetzten Funktionswerten multipliziert wird. Die Riemannsche Summe hat daher den Wert 0. - Und jetzt formal:

Zu dem vorgegebenen ε gibt es eine natürliche Zahl m mit $\frac{b}{m} < \varepsilon$.

Als Z^* wählt man die Zerlegung des Intervalls $[\,-b;\, b\,]$ in $n = 2m$ Teilintervalle gleicher Länge; als Zwischenstelle nimmt man im negativen Bereich jeweils das linke, im positiven Bereich das rechte Intervallende.

Dann ist die Feinheit der Zerlegung $\delta(Z^*) = \frac{2b}{2m} = \frac{b}{m} < \varepsilon$.

Durch die Wahl der Zwischenpunkte liegen diese symmetrisch zum Ursprung: $x_0 = -x_n$, $x_1 = -x_{n-1}$, ... ; allg. ist für $i = 0, 1, .., m$: $x_i = -x_{n-i}$.

In der Riemannschen Summe lassen sich daher die Summanden zu Paaren der Form $\frac{b}{m} \cdot f(x_i) + \frac{b}{m} \cdot f(-x_i)$ zusammenfassen. Dies ergibt aber jeweils 0, da f ungerade ist.

Somit gibt es eine Zerlegung mit Zwischenpunkten, deren Feinheit kleiner als ε ist und deren zugehörige Riemannsche Summe den Wert 0 hat.

A 3: a) Ein Intervall $[\,a;\, b\,]$ ist in n Intervalle gleicher Länge zerlegt. Gib zu dieser Zerlegung die Untersumme einer beschränkten Funktion f an.

b) Berechne für die Zerlegung von $[\,1;\, 4\,]$ in 10 Teilintervalle gleicher Länge die Untersumme zur Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^2 - 4x$.

c) Berechne für die Funktion aus Aufgabenteil b) eine Riemannsche Summe für die Zerlegung in n Teilintervalle gleicher Breite.
Bestimme hiermit ohne Verwendung des Hauptsatzes $\int_1^4 (x^2 - 4x)\, dx$.

L 3: Zu a) Jedes Teilintervall hat die Länge $\frac{b-a}{n}$.

Der i-te Zerlegungspunkt x_i des Intervalls ist $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$.

Mit diesen Werten x_i ist die gesuchte Untersumme U daher

$$U = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \inf \{\, f(x) \mid x \in [\, x_{i-1};\, x_i \,] \,\}.$$

Zu b) Der Graph von f ist ein Teil einer nach oben geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt bei $x = 2$ $\big($denn $f(x) = (x-2)^2 - 4\big)$.

Der Graph von f fällt also links von 2 und steigt rechts von 2. Wenn ein Teilintervall die Zahl 2 enthält, wird der kleinsten Wert dort angenommen. Über

jedem anderen abgeschlossenen Teilintervall des Definitionsbereichs wird der kleinste Wert an dem näher bei 2 liegenden Randpunkt angenommen.

Da die Länge eines jeden Teilintervalls $\frac{4-1}{10} = 0{,}3$ beträgt, sind die Teilungspunkte: 1; 1,3; 1,6; 1,9; 2,2; 2,5; 2,8; 3,1; 3,4; 3,7 und 4. Die zu berechnende Untersumme ist daher

$$U = 0{,}3\cdot\big(f(1{,}3)+f(1{,}6)+f(1{,}9)+f(2)+f(2{,}2)+f(2{,}5)+f(2{,}8)+f(3{,}1)+f(3{,}4)+f(3{,}7)\big).$$

Nach Definition von f(x) als $x^2 - 4x$ ist daher

$$U = 0{,}3\cdot\big(1{,}3^2 + 1{,}6^2 + 1{,}9^2 + 2^2 + 2{,}2^2 + 2{,}5^2 + 2{,}8^2 + 3{,}1^2 + 3{,}4^2 + 3{,}7^2 - 4\cdot(1{,}3 + 1{,}6 + 1{,}9 + 2 + 2{,}2 + 2{,}5 + 2{,}8 + 3{,}1 + 3{,}4 + 3{,}7)\big) .$$

Die Berechnung (mit TR) ergibt als Wert der Untersumme $U = -9{,}705$.

Zu c) Wählt man als Zwischenstelle ξ_i jeweils das rechte Ende des Teilintervalls, also x_i, so ergibt sich als zugehörige Riemannsche Summe R:

$$R = \frac{4-1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(1+\frac{3}{n}i) = \frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}((1+\frac{3}{n}i)^2 - 4(1+\frac{3}{n}i))$$

$$= \frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{6}{n}i+\frac{9}{n^2}i^2 - 4 + \frac{12}{n}i) = \frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(\frac{9}{n^2}i^2 - \frac{6}{n}i - 3)$$

$$= \frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{n^2}i^2 - \frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{6}{n}i - \frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}3$$

$$= \frac{27}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^2 - \frac{18}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}i - \frac{9}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}1$$

$$= \frac{27}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{18}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{9}{n}\cdot n$$

$$= \frac{9}{2}\cdot(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) - 9\cdot(1+\frac{1}{n}) - 9.$$

Dabei wurden die aus dem Unterricht bekannten Formeln für $\sum i$ und $\sum i^2$ beim Umformen verwendet.

Da $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist, strebt R mit wachsendem n nach Summen- und Produktregeln für Grenzwerte gegen $\frac{9}{2}\cdot 2 - 9 - 9$, also gegen -9.

Ergebnis: $\int_1^4 (x^2 - 4x)\,dx = -9$.

A 4: a) Beweise mit Hilfe des Kriteriums von Riemann, dass eine monoton abnehmende Funktion f auf einem Intervall [a; b] stets integrierbar ist.

b) Mit einem absoluten Fehler unter 0,01 soll durch Berechnung der Obersumme das Integral einer über [2; 6] definierten, monoton abnehmenden Funktion f mit $f(2) = 2\cdot f(6) = 6$ bestimmt werden. Entscheide, ob eine Zerlegung in 1234 Teilintervalle gleicher Länge hierfür immer ausreichend ist.

L 4: Zu a) Es ist zu zeigen, dass es zu jedem vorgegebenen positiven ε eine Zerlegung Z existiert, für welche $O(Z, f) - U(Z,f) < \varepsilon$ gilt.

Für die Zerlegung Z in n Teilintervalle gleicher Länge erhält man bei einer monoton abnehmenden Funktion:

$O(Z, f) - U(Z,f) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) - \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \cdot \big(f(a) - f(b) \big).$

Wählt man nun n größer als $\frac{b-a}{\varepsilon} \cdot \big(f(a) - f(b) \big)$, so ist $O(Z, f) - U(Z,f) < \varepsilon$;
damit ist die Integrierbarkeit von f gezeigt.

Zu b) Für eine Zerlegung Z in 1234 Teilintervalle gleicher Länge ergibt sich wegen $f(2) = 6$ und $f(6) = 3$ nach den Ergebnissen von Teilaufgabe a)

$O(Z, f) - U(Z,f) = \frac{6-2}{1234} \cdot \big(6 - 3 \big) = \frac{12}{1234} \cdot 0{,}0097... < 0{,}01.$

Die Zerlegung in 1234 Teilintervalle ist also für die gewünschte Genauigkeit ausreichend.

A 5: Über dem Intervall [0; 1] wird eine Folge von Funktionen f_0, f_1, f_2, ... definiert, indem man als f_0 die konstante Funktion mit dem Wert 1 wählt und für $n \in \mathbb{N}$ festlegt: $f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$.

a) Bestimme f_1, f_2 und f_3.

b) Vermute einen allgemeinen Ausdruck für f_n. Beweise die Richtigkeit der Vermutung durch vollständige Induktion.

L 5: Zu a) Unter Verwendung des Hauptsatzes erhält man nacheinander:

$$f_1(x) = \int_1^x f_0(t)dt = \int_1^x 1dt = x - 1,$$

$$f_2(x) = \int_1^x (t-1)dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_1^x = \frac{1}{2}x^2 - x - (\frac{1}{2}1^2 - 1) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2},$$

$$f_3(x) = \int_1^x (\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2})dt = \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right]_1^x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - (\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}.$$

Zu b) Aus $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x - 1$, $f_2(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,(x-1)^2$
und $f_3(x) = \frac{1}{6}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\,(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = \frac{1}{6}\,(x-1)^3$ kann man vermuten: $f_n(x) = \frac{1}{n!}\,(x-1)^n$.
Das ist für $n = 0, 1, 2, 3$ richtig; setzt man die Gültigkeit für ein $n > 0$ voraus, so folgt : $f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_1^x (t-1)^n\,dt = \left[\frac{1}{(n+1)!}\,(t-1)^{n+1}\right]_1^x = \frac{1}{(n+1)!}\,(x-1)^{n+1}$.
Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

A 6: a) Begründe, dass eine über [a; b] definierte, integrierbare Funktion, die keinen negativen Wert annimmt, kein negatives Integral haben kann.

b) Zeige allein mit Hilfe von Äquivalenzprinzip, Aufgabenteil a) und Additivität des Integrals : Wenn f und g zwei über [a; b] integrierbare Funktionen sind und $f(x) \le g(x)$ für alle x aus [a; b] gilt, dann ist auch $\int f \le \int g$.

c) Benutze Aufgabenteil b), ausgehend von der Ungleichung $\frac{1}{t+1} \le 1$ (für $t \ge 0$) für beliebiges positives x die Ungleichung $\ln(x+1) \le x$ herzuleiten.

L 6: Zu a) Das Integral lässt sich nach unten durch die Untersumme zu einer beliebigen Zerlegung abschätzen. Wählt man z. B. die Zerlegung mit den Zerlegungspunkten a und b, so ergibt sich $U = (b - a) \cdot \inf(f)$. Da 0 eine untere Schranke von f ist, kann inf(f) nicht negativ sein.

Somit folgt: $\int f \ge U = (b - a) \cdot \inf(f) \ge 0$.

Das Integral von f ist also nicht negativ.

Zu b) Nach Voraussetzung ist $g(x) - f(x) \ge 0$ für jedes x aus [a; b].

Nach Aufgabenteil a) folgt: $\int (g - f) \ge 0$; aufgrund der Linearität des Integrals ergibt sich daher $\int g = \int f + \int (g - f) \ge \int f$ und daher $\int f \le \int g$, w.z.b.w.

Zu c) Für $x > 0$ gilt nach Aufgabenteil b) :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \le \int_0^x 1dt, \text{ also } [\ln(t+1)]_0^x \le x \quad \text{und somit } \ln(x+1) - \ln(1) \le x\,.$$

Wegen $\ln(1) = 0$ ergibt sich daraus die behauptete Ungleichung.

A Z: a) Notiere für die auf [a; b] stetig differenzierbaren Funktionen f und g die Produktregel der Differentialrechnung und beweise daraus mit Hilfe des Hauptsatzes die Regel: $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = [\,f(x)\cdot g(x)\,]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$.

b) Berechne mit Hilfe der in a) hergeleiteten Regel das Integral der Logarithmusfunktion über [1; 2], indem du $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = x$ wählst.

L Z: Zu a) Die Produktregel besagt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen auch das Produkt f·g differenzierbar ist; für die Ableitung gilt:

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Nach Voraussetzung sind auch f' und g' stetig. Somit ist als Summe von Produkten stetiger Funktionen auch $(f \cdot g)'$ stetig und daher auch integrierbar.

$\int (f \cdot g)'(x)\,dx = \int (f' \cdot g + f \cdot g')$.

Da f·g eine Stammfunktion zu (f·g)' ist, kann die linke Seite der Gleichung nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bestimmt werden:

$$\int_a^b (f \cdot g)'(x)\,dx = \big[f(x) \cdot g(x)\big]_a^b.$$

Aufgrund der Additivität des Integrals ist

$$\int_a^b (f'\cdot g + f\cdot g')(x)dx = \int_a^b f'(x)\cdot g(x)(x)dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x)(x)dx\,.$$

Durch Subtraktion von $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich die Behauptung.

Zu b) Aus $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = x$ erhält man $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = 1$.

Anwendung der in Teil a) bewiesenen Regel ergibt:

$$\int_1^2 \ln(x) \cdot 1\,dx = [\,\ln(x)\cdot x\,]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x\,dx = \ln(2)\cdot 2 - \ln(1) - \int_1^2 1\,dx = 2\cdot\ln(2) - 1.$$

Ergebnis: $\int_1^2 \ln(x) \cdot 1\,dx = 2 \cdot \ln(2) - 1 \;\big(= \ln(\frac{4}{e}) \approx 0{,}386\big)$.