Aufgabe 3 der zweiten Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1982

Bearbeiteter Auszug aus: Aufgaben und Lösungen 1978-1982

Klaus-R. Löffler

Aufgabe

Für die nicht negativen Zahlen a_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ gelte $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.
Man beweise, dass dann der Term T mit

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2 - a_i}$$

ein Minimum besitzt, und berechne es.

Lösung

Der Beweis verwendet die für positive b_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ gültige Ungleichung

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} \geq n^2.$$

Die Ungleichung (1) kann durch vollständige Induktion bewiesen werden; sie ergibt sich auch durch Umformung der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel.

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2 - a_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{2 - a_i} + \frac{a_i - 2}{2 - a_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{2 - a_i} - 1\right) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} - n.$$

Da $2 - a_i$ für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ positiv ist, liefert (1)

$$\sum_{i=1}^{n} (2 - a_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geq n^2$$

und wegen $\sum_{i=1}^{n} (2 - a_i) = 2n - 1$ nach Umformung $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geq \frac{n^2}{2n - 1}$, also

$$T = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} - n \geq 2 \cdot \frac{n^2}{2n - 1} - n = \frac{n}{2n - 1}.$$

Mithin ist $\frac{n}{2n-1}$ eine untere Schranke zu T. Speziell für $a_i = \frac{1}{n}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ hat man

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{n-1}{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n - 1} = \frac{n}{2n - 1}.$$

Die untere Schranke $\frac{n}{2n-1}$ wird also von T als Wert angenommen und ist somit das Minimum von T.