Rechnen mit Beträgen*

- mit Anwendungsbeispielen

Klaus-R. Löffler

Nachdem man auf einer Geraden g einen Einheitspunkt E und einen davon verschiedenen Nullpunkt (oder *Ursprung*) O festgelegt hat, entspricht umkehrbar eindeutig jeder reellen Zahl ein Punkt auf g. Die Gerade hat dann eine Orientierung in der Richtung von O zu E. Den Abstand, den die reelle Zahl a vom Nullpunkt, dem Ursprung O hat, bezeichnet man als Betrag von a, in mathematischer Notation $|a|$. Für nicht-negative Zahlen ist das nichts anderes als die Zahl a selber; falls a negativ ist, erhält man den Abstand von O durch Bilden der Gegenzahl; -3 hat von O den Abstand 3, nämlich -(-3).
Anschaulich gesprochen: Der Betrag einer Zahl gibt den Abstand an, den die Position der Zahl auf dem Zahlenstrahl vom Ursprung hat.
Der Betrag ist daher wie folgt zu definieren:
Definition: Für a aus $\mathbb{R}$ setzt man $|a| := a$, falls $a > 0$, andernfalls $|a| := -a$.

Für das Rechnen mit Beträgen weist man die folgenden Regeln nach:

- $|a|$ ist nie negativ; genau dann gilt $|a| = 0$, wenn $a = 0$ ist,
- $|ab| = |a| \cdot |b|$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Summenungleichung) - und als unmittelbare Folgerung
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (Differenzenungleichung).

Will man in einem algebraischen Ausdruck Betragzeichen auflösen, muss man prüfen, ob der Ausdruck zwischen den Betragstrichen negativ ist oder nicht. Ist der Ausdruck offensichtlich nicht negativ, kann man die Betragstriche einfach weglassen wie in folgenden Beispielen:

- $|112| = 112$;
- $|x^2| = x2$;
- $|x^2 + 6x + 9| = x^2 + 6x + 9$;
- $|1 + \cos(x)| = 1 + \cos(x)$.

Entsprechend kann man die Betragsstriche bei einem nicht-positiven Ausdruck auflösen, indem man zum (-1)-fachen des Ausdrucks zwischen den Betragzeichen übergeht; Beispiele sind:

- $| - 111| = 111$;
- $|\sin(x) - 2| = 2 - \sin(x)$;
- $| - x^2 + 8x - 17| = x^2 - 8x + 17$.

*Letzte Bearbeitung August 2018

Meistens steht aber zwischen den Betragstrichen ein Ausdruck, von dem man nicht sagen kann, ob er positiv oder negativ ist; andernfalls hätte man die Betragstriche ja weglassen bzw. durch den Faktor -1 ersetzen können. In diesem Fall muss man beide Möglichkeiten (negativ oder nicht-negativ) berücksichtigen.
Beispielsweise ist die Gleichung $|2x + 1| = 21$ erfüllt, wenn $2x + 1$ den Wert 21 oder den Wert -21 hat. Im ersten Fall ist $x = 10$, im zweiten ist $x =$ -11; die Lösungsmenge dieser Gleichung ist also $L = \{-11; 10\}$.

Die Vorgehensweise beim Lösen von Gleichungen oder Ungleichungen mit Beträgen wird nachfolgend an Beispielen aus einer alten Hausaufgabe eines Kurses 12M erläutert. Dort lautet die erste Aufgabe: Bestimme zu den folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen die Lösungsmengen:

(1) $|x| + |x - 1| = 3$

(2) $|x - 1| + |x + 1| < 8$

(3) $|x2 - 4x - 22| = 10$

Lösungen:

Zu (1) Da $x - 1$ kleiner als x ist, gibt es drei Fälle zu unterscheiden:

a) x und $x - 1$ sind beide nicht negativ, also $x > 1$;

b) nur $x - 1$ ist negativ, also $0 < x < 1$;

c) $x - 1$ und x sind beide negativ, also $x < 0$.

Im Fall a wird aus der Gleichung: $x + x - 1 = 3$, also $x = 2$;

im Fall b wird aus der Gleichung $x + 1 - x = 3$, was offenbar unerfüllbar ist;

im Fall c erhält man $-x + 1 - x = 3$, also $x = -1$.

Als Lösungsmenge ergibt sich daher $L = \{-1; 2\}$.

Zu (2) Da $x - 1$ kleiner als $x + 1$ ist, gibt es drei Fälle:

a) $x - 1$ und $x + 1$ sind beide nicht negativ, also $x > 1$;

b) $x - 1$ ist negativ und $x + 1$ ist positiv, also $-1 < x < 1$;

c) $x - 1$ und $x + 1$ sind beide negativ, also $x < -1$.

Im Fall a wird aus der Ungleichung: $x - 1 + x + 1 < 8$, also $x < 4$; dies liefert: $x \in [1; 4[$;

im Fall b wird aus der Ungleichung $-x + 1 + x + 1 < 8$, was offenbar richtig ist; also gehören alle Elemente des Intervalls [-1; 1[zur Lösungsmenge;

im Fall c erhält man $-x+1-x-1 < 8$, also $x > -4$; das ist erfüllt für die Zahlen aus $]-4; -1[$.

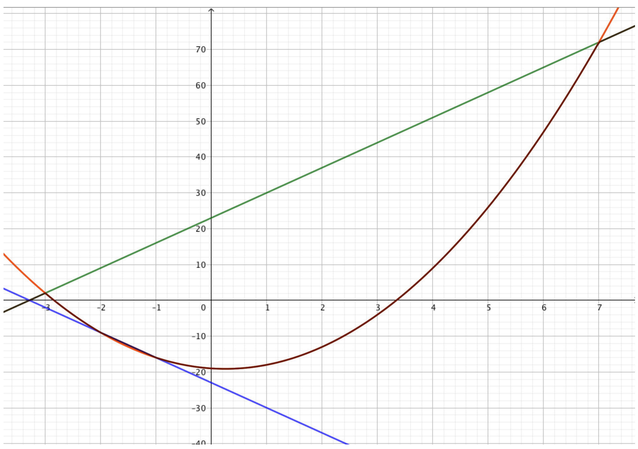
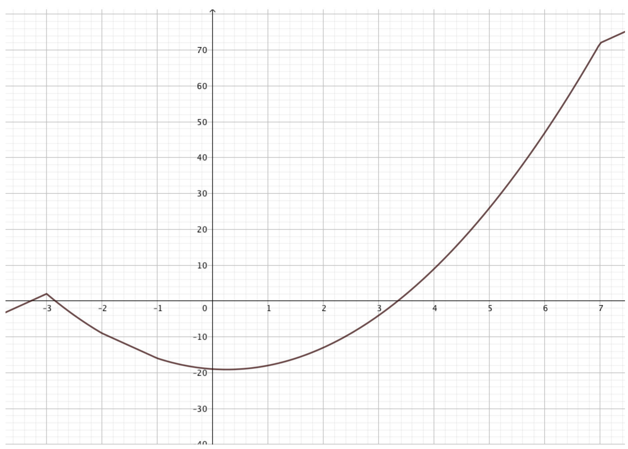
Als Lösungsmenge ergibt sich daher $L =] - 4; 4[$.

Zu (3) Zu unersuchen sind die beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 - 4x - 22 = 10, \qquad \text{und} \qquad x^2 - 4x - 22 = -10 \ .$$

Als Lösungsmenge der ersten Gleichung ergibt sich $\{-4; 8\}$, die Lösungen der zweiten Gleichung sind -2 und 6.

Die gesuchte Lösungsmenge ist daher $L = \{-4; -2; 6; 8\}$.

Im letzten Beispiel dieser Darstellung wird die Umsetzung eine Funktionsterms mit Beträgen zur Beschreibung einer stückweise aus ganzrationalen Teilen zusammengesetzten Funktion beschrieben:

Aufgabe: Stelle die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = |x^2 + 3x + 2| - |x^2 - 4x - 21| \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit Hilfe stückweise definierter ganzrationaler Funktionen dar.
Lösung:
Mit $g_1(x) := x^2 + 3x + 2$ und $g_2(x) := x^2 - 4x - 21$ gilt für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x) = |g_1(x)| - |g_2(x)|$.
Die beiden Funktionsterme innerhalb der Betragsstriche gehören zu nach oben geöffneten Parabeln zweiter Ordnung, haben also - da jeweils zwei Nullstellen auftreten - jeweils ihren Negativbereich zwischen den beiden Nullstellen.
Wegen $g_1(x) = (x+2)(x+1)$ und $g_2(x) = (x+3)(x-7)$ sind die Negativbereiche der beiden betrachteten Terme $]-2;-1[$ und $]-3;7[$.
Außerhalb von $[-3;7]$ sind $g_1(x)$ und $g_2(x)$ beide positiv; dort gilt also:

$$f(x) = g_1(x) - g_2(x) = 7x + 23$$

im Inneren dieses Intervalls ergibt sich folgende Aufteilung:

- $]-3;-2[$: $\quad f(x) = g_1(x) - (-g_2(x)) = 2x^2 - x - 19$
- $]-2;-1[$: $\quad f(x) = -g_1(x) - (-g_2(x)) = -7x - 23$
- $]-1;7[$: $\quad f(x) = g_1(x) - (-g_2(x)) = 2x^2 - x - 19$

Die zeichnerische Darstellung zeigt oben links die Graphen der für die stückweise Definition verwendeten ganzrationalen Funktionen und rechts noch einmal allein den Graphen der zusammengesetzten Funktion f.