Binomischer Satz

Klaus-R. Loeffler

23.08.2011

1 Binomialkoeffizienten und ihre Bedeutung

Definition des Binomialkoeffizienten

Für die nicht-negativen ganzen Zahlen n und k versteht man unter $\binom{n}{k}$ (gesprochen „n über k") die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Aus der Definition folgt unmittelbar:

$$(1) \qquad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Es gilt das folgende Additionstheorem

$$(2) \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Um das zu sehen, wähle man aus einer $n+1$-elementigen Menge M ein Element a aus. Unter den $\binom{n+1}{k+1}$ Teilmengen von M, die genau $k+1$ Elemente enthalten, liegt dann a in genau $\binom{n}{k}$, während $\binom{n}{k+1}$ Mengen das Element a nicht enthalten.
Auf der Gültigkeit der Gleichungen (1) und (2) beruht die folgende Darstelllung der Binomialkoeffizienten in einem dreieckigen Schema (*Pascalsches Dreieck*), wobei an der Spitze und längs der beiden Schenkel Einsen stehen und sich die weiteren Einträge jeweils induktiv aufgrund der darüber stehenden Werte ergeben:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Nummeriert man die waagerechten Zeilen beginnend mit 0 und die Positionen innerhalb der Zeile von links ebenfalls mit 0 beginnend, dann steht steht der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ in der Zeile n an der Position k. Die explizite Darstellung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ lässt sich durch eine kombinatorische Überlegung finden:
Vorgelegt sei eine Menge M mit n Elementen. Jede Permutation der n Elemente von M repräsentiert eine k-elementige Teilmenge, wenn man jeweils die ersten k Elemente der Permutation betrachtet. Dann hat jede k-elementige Teilmenge $k! \cdot (n-k)!$ Repräsentanten, da bei jeder Permutation sowohl

bei Permutation der ersten k Elemente wie auch bei Permutation der letzten $n-k$ Elemente die Menge aus den ersten k Elementen die gleiche bleibt.
Von den $n!$ Permutationen von M sind in diesem Sinne also jeweils $k! \cdot (n-k)!$ äquivalent, so dass sich für die Anzahl $\binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen der Wert $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ ergibt.

(3) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Die Richtigkeit der Formel (3) lässt sich auch unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2) durch vollständige Induktion beweisen.

2 Der binomische Satz

Unter dem binomischen Satz versteht man die Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

Dabei sind a und b beliebige reelle Zahlen, n ist eine natürliche Zahl.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch eine kombinatorische Überlegung:

> Bei der Multiplikation der n Faktoren $(a+b)$ entstehen jeweils Produkte der Form $a^k \cdot b^{n-k}$, wenn aus genau k Faktoren der Summand a und somit aus den restlichen $n-k$ Faktoren der Summand b gewählt wird. Da es hierfür genau $\binom{n}{k}$ Mögleichkeiten gibt, tritt der Summand $a^k \cdot b^{n-k}$ beim Ausmultiplizieren genau $\binom{n}{k}$ mal auf.

Damit ist der kombinatorische Beweis abgeschlossen. Für einen Beweis mittels vollständiger Induktion beachte man, dass die Aussage für $n = 0$ offensichtlich richtig ist und sich der Schluss von n auf $n+1$ auf folgende Weise ergibt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} \cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k \cdot b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k})\ a^k \cdot b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k}\ a^k \cdot b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}\ a^k \cdot b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

3 Folgerungen

3.1 Einige Summenformeln

Unmittelbar aus dem binomischen Satz für $a = 1$, also $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$ folgen durch spezielle Einsetzungen, nämlich $x = 1$ bzw. $x = -1$ die Summenformeln

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0;$$

Weitere Summenformeln ergeben sich z.B. nach Ableiten beider Seiten nach x, also aus

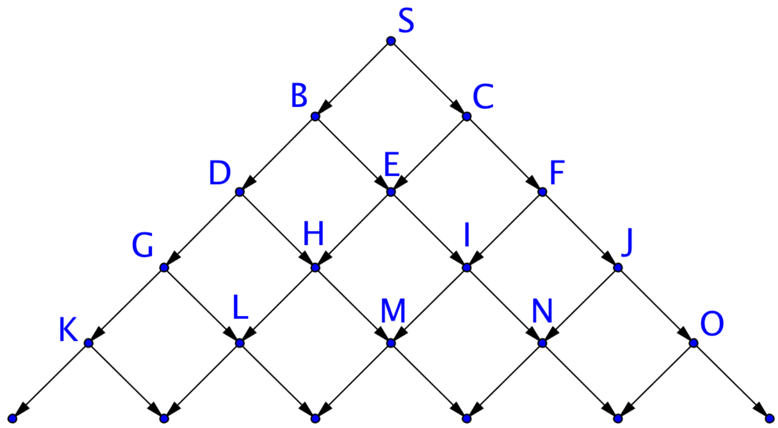
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \cdot x^{k-1} = n \cdot (1+x)^{n-1}$$

durch Einsetzen von $x = 1$ bzw. -1:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n \cdot 2^{n-1}; \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \cdot k = 0$$

Weitere Summenformeln kann man durch höhere Ableitungen bzw. andere Einsetzungen für x gewinnen.

3.2 Eine weitere kombinatorische Folgerung



Betrachtet man die Skizze oben als ein System von Einbahnstraßen und zählt die Wege, die vom Startpunkt S zu einem der anderen Punkte führen, so ist festzustellen:

1. Zu den Punkten am Rand (also links z. B. B, D, G, K, rechts C, F, J, O) führt jeweils genau ein Weg.

2. Da jeder Weg zu einem der Punkte im Inneren entweder vom Punkt links darüber oder vom Punkt rechts darüber kommt, ergibt sich die Anzahl der Wege durch einen inneren Punkt als Summe aus den Anzahlen der Wege, die zu den beiden rechts bzw. links darüber liegenden Punkten hinführen.

Ordnet man also den Punkten gemäß ihren Plätzen nach Zeile und Position innerhalb der Zeile Adressen zu, dann hat z.B. der Punkt E die Adresse (1;1), der Punkt N die Adresse (4; 3). Aus der Zählung der Wege ergibt sich mit den beiden Feststellungen über die Anzahlen:
Vom Punkt S(0;0) zum Punkt Z mit der Adresse $(n; k)$ führen genau $\binom{n}{k}$ verschiedene Wege.
Betrachtet man nun die Anzahl der Wege, die von S zum Punkt Z mit der Adresse $(2n; n)$ führen, so sind dies $\binom{2n}{n}$.

Jeder dieser Wege führt über einen der Punkte mit der Adresse $(n;i)(i = 0,1,2,3,...,n)$. Da aus Symmetriegründen von S zum Punkt mit der Adresse $(n;i)$ genau so viele Wege führen wie von dort zum Punkt Z, gibt es genau $\binom{n}{i}^2$ Wege von S zu Z, die über die Stelle $(n;i)$ führen.
Damit ergibt sich die Summenformel:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{i}$$