Gleichungen

Klaus-R. Löffler

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Hinführung

1.1.1 Die Eigenschaften der Gleichheitsrelation

Eigenschaften der Gleichheitsrelation sind Reflexivität, Symmetrie, und Transitivität[1]; für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

1. $a = a$ (Reflexivität),
2. aus $a = b$ folgt $b = a$ (Symmetrie),
3. aus $a = b \;\wedge\; b = c$ folgt $a = c$ (Transitivität).

Die Gleichheitsrelation ist nicht nur eine Äquivalenzrelation, sondern sogar eine *Kongruenzrelation*, sie bleibt bei Anwendung der Grundrechenarten Addition und Multiplikation bestehen: Aus $a = b$ folgt sowohl $a + c = b + c$ als auch $a \cdot c = b \cdot c$.

1.2 Was ist eine Gleichung ?

Formal entsteht eine Gleichung, indem zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden werden, wobei die Bedeutung der Gleichung erst durch den Kontext deutlich wird. Zu unterscheiden ist zwischen einer Gleichung als Aussage, wie sie innerhalb von Beweisführungen oder rechnerischen Herleitungen auftritt, und einer Gleichung als Problemstellung, wobei gefragt wird, für welchen Einsetzungen der Platzhalter eine richtige Aussage entsteht. Für die Ausführungen in diesem Artikel sind besonders drei Arten von Gleichungen wichtig, die klassifizierend als *Funktionsgleichungen, Bestimmungsgleichungen, Identitäten* bezeichnet werden.

- Die Funktionsgleichung einer Funktion f gibt an, wie sich zu einer Stelle x der Argumentmenge[2] von f der zugehörige Funktionswert $f(x)$ ergibt. Beispiel: $f(x) = x^2 + 3$.
- Eine Bestimmungsgleichung ist (in der hier behandelten Form) eine Gleichung zwischen zwei Termen L und R und mit einem Platzhalter x, wobei das Lösen der Gleichung die Ermittlung aller derjenigen Zahlen bedeutet, die beim Einsetzen in den Platzhalter aus der Gleichung $L(x) = R(x)$ eine richtige Aussage machen. Beispiel: $x^2 + 3 = 4x$. Nur durch Einsetzen von 1 oder 12 als Wert für x entsteht eine richtige Aussage. Die Menge der Lösungen[3] ist also $\{1; 12\}$.
- Man kann eine Identität als Bestimmungsgleichung auffassen, deren Lösungsmenge aus alle Zahlen besteht, die sich sinnvoll[4] in beide Seiten einsetzen lassen. Häufig verwendete Identitäten sind die weiter unten noch einmal angegebenen binomischen Formeln. Andere Beispiele : $x + x = 2x$ (als ziemlich triviale Identität) oder - etwas komplizierter - die für alle reellen Zahlen außer 1 und für alle natürlichen Zahlen n gültige Formel: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

In der Regel kann bei der Behandlung von Gleichungen auf einen entsprechenden Kontext nicht verzichtet werden.

[1] Eine Relation mit diesen drei Eigenschaften wird als *Äquivalenzrelation* bezeichnet.
[2] Üblich ist auch die Bezeichnung *Definitionsbereich* von f
[3] Der Begriff *Lösung* wird in der Mathematik in mehrfachem Sinn verwendet. Zum einen bezeichnet man jeden Wert x mit $L(x) = R(x)$ als Lösung, zum anderen wird auch der Vorgang zur Ermittlung solcher Werte als Lösung bezeichnet; schließlich wird gelegentlich die Menge aller Lösungen, also $\{x|L(x) = R(x)\}$ als Lösung bezeichnet. In dieser Zusammenstellung wird hierfür der Begriff *Lösungsmenge* verwendet.
[4] Gemeint ist, dass durch das Einsetzen ein mathematisch sinnvollere Ausdruck entsteht, bei der Auswertung also weder eine Division durch 0 erfolgt noch die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen wird.

1. So stellt die Gleichung x = 3 je nach Bedeutung von x eine falsche Aussage, eine Funktionsgleichung oder eine nach Lösung suchende Aussageform dar. Wenn x den Wert 44 hat, ist die Aussage sicher falsch; deutet man die Gleichung als Frage nach der Menge aller Zahlen, deren Einsetzung für x zu einer richtigen Aussage führt, hat man eine Gleichung mit der Lösungsmenge $\{3\}$.

2. Die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ ist ohne Kontext weder richtig noch falsch; setzt man zusätzlich voraus, dass a, b, c die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind, dann liegt eine richtige Aussage vor, falls c die größte der drei Zahlen ist.

3. Die Gleichung $f(x) = 0$ kann die Definition der Funktion f als Nullfunktion sein, die Aussage, dass es sich bei einer bereits auf andere Weise festgelegten Funktion f um die Nullfunktion handelt, oder aber eine Bestimmungsgleichung, bei der die Menge der Nullstellen der Funktion f zu bestimmen ist.

Neben den Funktionsgleichungen, Bestimmungsgleichungen und Identitäten stellen die - hier nicht behandelten - Funktionalgleichungen und Differentialgleichungen einen wichtigen Bereich der Gleichungen dar; z.B. hat die Exponentialfunktion mit der Anfangsbedingung $f(0) = 1$ die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ und die Differentialgleichung $f'(x) = f(x)$.

1.3 Die binomischen Formeln

In jedem kommutativen Ring (also jeder Menge, die bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe bildet, in der eine Multiplikation erklärt ist, die kommutativ und assoziativ ist, und wo das Distributivgesetz gilt), also zum Beispiel in der Menge der reellen Zahlen gelten die folgenden binomischen Formeln:

1. $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$
2. $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$
3. $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.

Zum Nachweis braucht man nur jeweils auf der rechten Seite die Klammern aufzulösen. Wichtig ist bei diesen Formeln, daß man sie ausgehend von der linken Seite anwendet, also erkennen muss, wo sie gebraucht werden können. Die schulübliche Form der Erlernens, bei der mit den jeweiligen Klammerausdrücken begonnen wird, ist ebenso beliebt wie nutzlos, da hierdurch im Gegensatz zum Ausmultiplizieren der Klammern allenfalls ein Rechenschritt gespart werden kann, aber keine Ausdrücke strukturiert werden können.
Beispiele von Ausdrücken, die sich durch die Anwendung einer binomischen Formel faktorisieren lassen: $12321 - 4x^2$, $9x^2 - 3x + 0,25$, $3a^2 + 12 + 6a$.

1.4 Das Äquivalenzprinzip; zulässige Umformungen einer Gleichung

Eines der wichtigsten Prinzipien der Mathematik lautet:
Wenn du die Lösung einer Aufgabe nicht unmittelbar ablesen kannst, forme sie so um, dass sich zwar die Menge der Lösungen nicht verändert, die Aufgabe aber einfacher geworden ist. Derartige Umformungen heißen Äquivalenzumformungen oder zulässige Umformungen. Im Idealfall führen die Äquivalenzumformungen zu einer Gleichung, deren Lösungen unmittelbar abzulesen sind.
Die beiden zulässigen Umformungen einer Gleichung sind

1. Addition der gleichen Zahl (oder des gleichen Terms) zu beiden Seiten

2. Multiplikation beider Seiten mit der gleichen von null verschiedenen Zahl (oder mit dem gleichen Term, falls dieser nicht den Wert null hat).

Denn wenn z eine Lösung der Gleichung $A(x) = B(x)$ ist, wobei $A()$ und $B()$ irgendwelche Terme sind, dann gilt $A(z) = B(z)$, also für beliebige reelle Zahlen p, q auch $A(z) + p = B(z) + p$ und $q \cdot A(z) = q \cdot B(z)$.
Somit ist z auch Lösung der Gleichungen $A(x)+p = B(x)+p$ und $\cdot A(x) = q \cdot B(x)$. Die Lösungsmenge der neuen Gleichungen wird also durch die Umformung nicht kleiner. Bezeichnet man die gesuchte Lösungsmenge mit L und die zu den neuen Gleichungen gehörenden Lösungsmengen mit L_1 und L_2, so ist also L Teilmenge von L_1 und Teilmenge von L_2. Da die Addition von $-p$ nach der gleichen Überlegung nicht zu einer Verkleinerung von L_1 führt, sind L und L_1 Teilmengen voneinander, also ist $L = L_1$. Nach der entsprechenden Überlegung für die Multiplikation mit dem Kehrwert von q (und dafür darf jetzt q nicht null sein!!) erhält man $L = L_2$. Damit sind beide oben angegebenen Umformungen (mit $q \neq 0$) als zulässig nachgewiesen: Die Lösungsmenge bleibt gleich.

2 Die Lösung der linearen Gleichung $ax + b = c$

Durch Addition von $-b$ erhält man die äquivalente Gleichung $ax = c - b$.
Falls nun a verschieden von null ist, ergibt die Multiplikation mit dem Kehrwert von a die Gleichung $x = \frac{c-b}{a}$; die Lösungsmenge ist also $L = \{\frac{c-b}{a}\}$.
Ist dagegen $a = 0$, so ist die zu lösende Gleichung $0 * x = c - b$. Das ist allgemeingültig, falls $b = c$ gilt, andernfalls unerfüllbar.
Damit hat man für den Fall $a = 0$ die Lösungen $L = \mathrm{R}$, falls $b = c$, andernfalls $L = \{\}$.

3 Der Vergleich mit null

3.1 Lösen durch Zerlegung in nicht-negative Summanden

Wenn die linke Seite einer Gleichung der Form $A(x) = 0$ sich als Summe von nicht-negativen Summanden darstellen läßt, wird die Gleichung nur für den Fall erfüllt, daß alle Summenden den Wert null haben, wie bei den folgenden drei Beispielen:

- $x^2 + (4x - 4711)^2 + (12^x 7 + 5^x - 1001)^4 + |x - 22| = 0$ Die linke Seite ist die Summe von vier Summanden, die alle nicht negativ sein können. Damit die Summe den Wert 0 hat, müssen alle Summanden diesen Wert haben, also z.B. x^2 und $|x - 22|$. Da dies offenbar nicht möglich ist (es müsste gelten $x = 0$ und $x = 22$), ist $L = \{\}$.

- Die Gleichung $(4x - 4712)^2 + (3x - 3534)^2 = 0$ hat - wie die entsprechende überlegung zeigt - die Lösungsmenge $L = \{1178\}$.

- Die Gleichung $9x^2 - 60x + 100,001 = 0$ hat die Lösungsmenge $\{\}$, wie die Umformung zu $(3x - 10)^2 + 0,001 = 0$ deutlich macht.

3.2 Lösen durch Faktorisieren

Eine Idealform zum Lösen einer Gleichung sieht so aus, daß auf der rechten Seite der Gleichung eine 0, auf der linken Seite ein Produkt aus möglichst einfachen Faktoren steht. Denn ein Produkt nimmt genau dann den Wert null an, wenn einer der Faktoren den Wert null hat, - und die Faktoren sind im allgemeinen wesentlich einfacher als das Produkt.
So sind die folgenden Gleichungen (1) und (2) zwar äquivalent, wie man leicht durch Ausmultiplizieren von (1) bestätigt, aber nur bei (1) lässt sich sofort die Lösungsmenge $\{-9; 2; 3\}$ ablesen:

(1) $(2x-4)\cdot(x-3)\cdot(x+9)\cdot(x^2+144)=0$,

(2) $15552-11232x+1260x^2+210x^3+8x^4+2x^5=0$.

4 Quadratische Gleichungen

4.1 Die Normalform einer quadratischen Gleichung

Eine Gleichung heißt quadratisch (mit der Variblaen x), wenn sie sich durch zulässige Umformungen auf die folgende Form bringen *läßt* : $ax^2+bx+c=0$, wobei a,b,c irgendwelche reellen Zahlen sind. Falls der Koeffizient a den Wert 0 hat, ist die Gleichung nicht quadratisch, sondern nur linear und reduziert sich auf die Form $bx+c=0$; diese Form der Gleichung ist bereits weiter oben behandelt worden.
Die quadratische Gleichung heißt *normiert*, wenn $a=1$ gilt. Jede quadratische Gleichung lässt sich normieren, indem man sie durch den Koeffizienten von x^2 dividiert. Mit $p:=\frac{b}{a}$ und $q:=\frac{c}{a}$ erhält man dann die Normalform der quadratischen Gleichung: $x^2+px+q=0$.
Zum Lösen jeder quadratischen Gleichung genügt es also, ein Verfahren zum Lösen von quadratischen Gleichungen in Normalform zu beherrschen.

4.2 Definition und Existenz von Quadratwurzeln

Wenn a und b reelle Zahlen sind, wird folgender Sachverhalt gemeint, wenn man sagt a ist die *Quadratwurzel* aus b, in Zeichen $a=\sqrt{b}$:

- a ist eine reelle nicht-negative Zahl
- $a^2=b$.

Statt von der Quadratwurzel spricht man - wenn keine Missverständnis zu befürchten ist - kürzer von der Wurzel. Die Zahl b wird im Ausdruck $\sqrt{b}$ als Radikand bezeichnet; aufgrund der Definition kann weder a noch b negativ sein. Es ist eine wesentliche Eigenschaft der reellen Zahlen gegenüber den rationalen Zahlen, dass es zu jeder nicht-negativen reellen Zahl eine Wurzel gibt.
Die Wurzel aus einer nicht-negativen reellen Zahl ist stets eindeutig bestimmt; der gelegentlich verwendete Begriff "negative Wurzel"[5] für die Gegenzahl zu einer Wurzel ist fehlerhaft. Die Eindeutigkeit der Wurzel ergibt sich z.B. aus folgender Überlegung: Wenn a_1 und a_2 beides Wurzeln aus b sind, dann muß gelten $a_1^2=b$ und $a_2^2=b$, also $a_1^2=a_2^2$. Dann folgt $a_1^2-a_2^2=0$, also nach der dritten binomischen Formel:
$(a_1-a_2)\cdot(a_1+a_2)=0$.
Da a_1 und a_2 beide nicht negativ sind, kann $a_1+a_2=0$ nur im Fall $a_1=a_2=0$ gelten, oder es folgt $a_1-a_2=0$; mithin ist in jedem Fall $a_1=a_2$. Die Wurzel ist also eindeutig bestimmt.
Es ist eine besondere Eigenschaft der reellen Zahlen, dass es zu jeder nicht-negativen Zahl eine Wurzel gibt. In der Menge der rationalen Zahlen, also der Zahlen, die sich als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen lassen, ist das nicht der Fall [6].

[5] Vor allem in der früheren Literatur wurden die Lösungen einer Gleichung zweiten oder höheren Grades auch als *Wurzeln der Gleichung* bzeichnet. In diesem Zusammenhang hatte es natürlich auch Sinn, von den negativen Wurzeln der Gleichung zu sprechen.

[6] Z.B. gibt es - wie leicht nachzuweisen ist - keine rationale Zahl, deren Quadrat 2 beträgt.

4.3 Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

4.3.1 Das Diskriminantenverfahren

In der nachfolgend dargestellten Form bezieht sich das Diskriminantenverfahren grundsätzlich auf eine quadratische Gleichung, die in Normalform gegeben ist. Dies Normalform lautet $x^2 + px + q = 0$
Der Term auf der linken Seite der quadratischen Gleichung wird so umgeformt, daß man einen Teil nach der ersten binomischen Formel zusammenfassen kann:
$x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q = 0$, also $(x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p^2}{4} - q) = 0$.
Mit der Abkürzung $D := \frac{p^2}{4} - q$ hat die quadratische Gleichung die Form $(x + \frac{p}{2})^2 - D = 0$. Das Vorzeichen von D ist nun entscheidend für Existenz und Anzahl von Lösungen.

- Wenn D negativ ist, steht auf der linken Seite der Gleichung die Summe aus einem quadratischen, also nicht negativen Ausdruck und der positiven Zahl $-D$. Da diese Summe stets positiv ist, kann die Gleichung von keinem Wert von x erfüllt werden; es gibt also keine Lösungen.

- Wenn D den Wert null hat, vereinfacht sich die Gleichung zu $(x + \frac{p}{2})^2 = 0$.

  Da 0 die einzige Zahl ist, deren Quadrat den Wert null hat, ist dies äquivalent zu $x + \frac{p}{2} = 0$; die Gleichung hat in diesem Fall also genau eine Lösung, nämlich $-\frac{p}{2}$.

- Wenn D eine positive Zahl ist, lässt sich D als Quadrat einer positiven Zahl (der Wurzel aus D) darstellen, die hier einmal mit w bezeichnet wird.

  Die zu lösende Gleichung lautet dann $(x + \frac{p}{2})^2 - w^2 = 0$.

  Nach der dritten binomischen Formel ist das äquivalent zu $(x + \frac{p}{2} + w) \cdot (x + \frac{p}{2} - w) = 0$.

  Das Produkt auf der linken Seite wird genau dann null, wenn dies für einen der Faktoren gilt, also wenn x einen der beiden Werte $-\frac{p}{2} - w$ und $-\frac{p}{2} + w$ annimmt. Die quadratische Gleichung hat in diesem Fall also genau zwei Lösungen.

Praktische Anwendung des Diskriminantenverfahrens

Um eine quadratische Gleichung mit Hilfe des Diskriminantenverfahrens zu lösen, bringt man zunächst die Gleichung auf Normalform und berechnet die Diskriminante D.

- Wenn D negativ ist, ist man schon fertig mit der Berechnung, denn dann gilt $L = \{\}$
- Ist $D = 0$, dann hat man $L = \{-\frac{p}{2}\}$;
- Wenn D positiv ist, hat man $L = \{-\frac{p}{2} - \sqrt{D}; -\frac{p}{2} + \sqrt{D}\}$.

Hinweis und Warnung

Kaum einer wird bei einer Busfahrt die Unterscheidung zwischen den Linien 212 und 221 für unwesentlich halten oder beim Einsteigen nur auf die Nummer der Buslinie und nicht auch die Fahrtrichtung achten. Dagegen ist beim Lösen quadratischer Gleichungen bei Schülern die entsprechende Nachlässigkeit weit verbreitet. Bevor nicht durch ausreichende Übung wirkliche Sicherheit beim Lösen quadratischer Gleichungen hergestellt ist, sollte bei Gleichungen mit nicht-leerer Lösungsmenge das Ergebnis auf jeden Fall durch eine Probe kontrolliert werden.

4.3.2 Das Faktorisierungsverfahren

Die Idee der Faktorisierung von Termen auf der linken Seite einer Gleichung, auf deren rechter Seite 0 steht, beruht darauf,

- dass ein Produkt im allgemeinen unzugänglicher als die einzelnen Faktoren ist, und
- dass es genau dann den Wert null annimmt, wenn dies für einen der Faktoren gilt.

Die Form einer Gleichung, bei der die linke Seite in Faktoren zerlegt ist und rechts eine Null steht, ist daher - wie schon an früherer Stelle dargestellt - in gewisser Weise als ideal zu bezeichnen.

Der Vieta'sche Wurzelsatz

Wenn die Gleichung $x^2+px+q=0$ eine positive Diskriminante D hat, dann sind die beiden Lösungen gegeben durch

$$x_1 = -\tfrac{p}{2} - \sqrt{D}, \qquad x_2 = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{D}\ .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{D} + (-\frac{p}{2}) + \sqrt{D} = -p, \\ x_1 \cdot x_2 &= (-\frac{p}{2} - \sqrt{D})(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}) = \frac{p^2}{4} - D = q. \end{aligned}$$

Damit hat man die Aussage des *Vieta'schen Wurzelsatz*es: Wenn die Gleichung $x^2+px+q=0$ zwei Lösungen hat, dann ist die Summe dieser Lösungen $-p$ und ihr Produkt ist q.

Es gilt aber auch die umgekehrte Aussage:
Wenn für die reellen Zahlen x_1, x_2, p, q die Gleichungen $x_1+x_2=-p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ gelten, dann sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$.

Denn Einsetzen liefert $x^2-(x_1+x_2)*x+x_1\cdot x_2=0$, was äquivalent zu $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$ ist, wie man leicht durch Ausmultiplizieren der linken Seite bestätigt. An der Faktorform ist aber unmittelbar abzulesen, dass x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung - und zwar die einzigen - sind.

Das Erraten der (ganzzahligen) Lösungen

Wenn beide Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung ebenso wie die Koeffizienten p und q der Normalform der Gleichung ganzzahlig sind, lassen x_1 und x_2 leicht „erraten“. Denn unter den wenigen Möglichkeiten, q als Produkt zweier ganzzahliger Faktoren darzustellen, muß man nur diejenige auswählen, bei der die Summe der beiden Faktoren -p ergibt.
Beispiel: $x^2-5x-14=0$.
Unter den Zerlegungen von -14 in zwei ganzzahlige Faktoren ist diejenige zu finden, bei der die Summe der Faktoren 5 ist. Da das Produkt negativ ist, kommen nur Faktoren mit entgegengesetzten Vorzeichen in Frage; da die Summe positiv ist, muss der betraglich größere Faktor der positive sein. Damit bleiben nur die Zerlegungen $14\cdot(-1)$ und $7\cdot(-2)$; damit hat man die Lösungen -2 und 7.

5 Gleichungen dritten Grades

5.1 Ganzrationale Funktionen dritten Grades

Der Funktionsterm einer ganzrationale Funktion dritten Grades ist ein Polynom dritten Grades, hat also die Form $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Durch algebraische Umformungen einer vorgegebenen Gleichung dritten Grades ist die Frage nach der Menge ihrer Lösung äquivalent zur Frage nach der Nullstellenmenge einer normierten ganzrationalen Funktion dritten Grades. Für eine solche Funktion mit einem Funktionsterm der Form $x^3 + bx^2 + cx + d$ liefert die Differentialrechnung folgende Ergebnisse:

- Der Graph ist rechtsdrehend über dem Intervall $]-\infty, -\frac{b}{3}]$ und linksdrehend über $[-\frac{b}{3}, \infty[$.
- Der Graph schneidet die x-Achse mindestens einmal und höchstens dreimal.
- Genau dann steigt der Graph streng monoton, wenn $3c \geq b^2$ gilt. In diesem Fall hat die Funktion genau eine Nullstelle.
- Mit der Substitution $y = x + \frac{b}{3}$ wird der Graph parallel zur x-Achse so verschoben, dass der Wendepunkt auf der y-Achse liegt. Für den Funktionsterm ergibt sich:

  $$(y - \frac{b}{3})^3 + b(y - \frac{b}{3})^2 + c(y - \frac{b}{3}) + d = y^3 + (c - \frac{b^2}{3})y + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$$

  Es genügt also, ein Verfahren zur Lösung von Gleichungen des Typs $y^3 + py + q = 0$ zu ermitteln.

5.2 Ermittlung einer reellen Lösung zu $y^3 + py + q = 0$

Ausgehend von der Gleichung $y^3 + py + q = 0$ ergibt sich mit den Hilfsvariablen u, v aus dem Ansatz $y = u - v$

$$y^3 = (u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 \quad (= u^3 - v^3 - 3uv(u - v) = u^3 - v^3 - 3uv \cdot y)$$

durch Koeffizientenvergleich mit $y^3 = -py - q$

$$p = 3uv \land q = -u^3 + v^3 \ .$$

Auflösen der ersten Gleichung nach v und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$q = -u^3 + \left(\frac{p}{3u}\right)^3, \quad \text{also} \quad u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Diese - bezüglich u^3 - quadratische Gleichung hat die Diskriminante $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$, so dass folgt:

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \quad \text{und damit} \quad v^3 = q + u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \ .$$

Dabei müssen die Wurzeln wegen $v^3 - u^3 = q$ jeweils mit gleichem Vorzeichen genommen werden, so dass sich als Lösung ergibt:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

Bei Wahl des anderen Vorzeichens vor der Wurzel erhält man das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} = x_1 \end{aligned}$$

5.3 Darstellung einer reellen Lösung im allgemeinen Fall

Vorgelegt sei die normierte Gleichung $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Erste Substitution:

$$p := c - \frac{b^2}{3}\ , q := \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d.$$

Mit diesen Werten p, q errechnet man

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$$

und hiermit schließlich die partikuläre Lösung[7] $x_1 = y_1 - \frac{b}{3}$.

6 Gleichungen n-ten Grades ($n \geq 2$)

6.1 Grundlagen

6.1.1 Polynome

Unter einem *Polynom* $p(x)$ wird hier eine Summenterm verstanden, dessen Summanden reelle Vielfache von Potenzen der Variablen x sind, also z.B.

$$2x^2 - 3x + 1, \quad -x^7 - 5, \quad 9x^5 - x^2 \quad \text{oder allgemein} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ mit } n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

Unter dem *Grad* des Polynoms[8] $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ versteht man den größten Index i mit $a_i \neq 0$. Für die Beispiele oben hat man also $\text{grad}(2x^2 - 3x + 1) = 2$, $\text{grad}(-x^7 - 5) = 2$, $\text{grad}(-x^7 - 5) = 2$.
Polynome haben in vielerlei Hinsicht Eigenschaften, wie sie bei den ganzen Zahlen auftreten: Die Menge der Polynome ist gegenüber den Grundrechenarten Addition und Multiplikation abgeschlossen.

Existiert zu einem Polynom $p(x)$ ein Polynom $q(x)$ und eine reelle Zahl a, so dass für alle reellen Zahlen x die Darstellung $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$ richtig ist, so wird $(x - a)$ als Linearfaktor von $p(x)$ bezeichnet.

Polynomdivision[9]

Ist n eine positive ganze Zahl, a eine reelle Zahl und $p(x)$ ein Polynom vom Grade n, so existiert eindeutig ein Polynom $q(x)$ vom Grade $n-1$, so dass folgende Identität gilt: $p(x) = (x-a) \cdot q(x) + p(a)$.

Zum <u>Beweis</u> betrachte man ausgehend von $p(x) = \sum_{n=0}^{n} a_i x^i$ das Polynom $\sum_{n=0}^{n-1} b_i x^i$, dessen Koeffizienten b_i folgendermaßen rekursiv absteigend definiert sind:

$$b_n := 0 \quad \wedge \quad \bigwedge_{i \in \{n, n-1, n-2, \ldots, 1, 0\}} b_{i-1} := a_i + a \cdot b_i \quad \wedge \quad r := b_{-1}.$$

[7] Abweichend von der sonst meist üblichen Einschränkung des Wurzelbegriffs auf nicht-negative Radikanden ist hier das Ziehen der dritten Wurzel als Umkehrung des Potenzierens auf ganz $\mathbb{R}$ aufzufassen.
[8] Dem Nullpolynom ($p(x) = 0$) wird als einzigem hierbei kein Grad zugeordnet
[9] Hier wird (noch) nicht die allgemeine Polynomdivision behandelt, sondern nur der Spezialfall der Division durch ein lineares und normiertes Polynom.

Definiert man nun $q(x)$ als $\sum_{n=0}^{n} b_i x^i$ so hat man

$$\begin{aligned}
(x-a)\cdot q(x)+r &= (x-a)\cdot \sum_{n=0}^{n-1} b_i x^i + b_{-1} = \sum_{n=0}^{n-1} b_i x^{i+1} - \sum_{n=0}^{n-1} ab_i x^i + b_{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{n} b_{i-1} x^i - \sum_{n=0}^{n-1} ab_i x^i + ab_0 + a_0 \\
&= b_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{n-1} b_{i-1} x^i - \sum_{n=0}^{n-1} ab_i x^i - ab_0 + ab_0 + a_0 \\
&= a_n x^n + \sum_{n=1}^{n-1} (b_{i-1} - ab_i) x^i + a_0 = \sum_{n=0}^{n} a_i x^i = p(x)
\end{aligned}$$

Einsetzen von $x := a$ in die damit als richtig nachgewiesene Identität $q(x) = (x-a)\cdot q(x) + r$ ergibt $r = p(a)$.
Die oben beschriebene Umformung von wird auch als Division des Polynoms $p(x)$ durch das lineare Polynom $x-a$ bezeichnet. Der Rest r ist der Funktionswert[10] $p(a)$, die Division durch $x-a$ geht also genau dann ohne Rest auf, wenn a eine Nullstelle des zu teilenden Polynoms ist. In diesem speziellen Fall erhält man dann die Faktorzerlegung $p(x) = (x-a)\cdot q(x)$; $x-a$ ist ein *Linearfaktor* von $p(x)$.

6.1.2 Der Nullstellensatz für stetige Funktionen

Der nachfolgende Satz ist ein reiner Existenzsatz; er sichert bei einer betrachten Funktion f in gewissen Fällen die Existenz (mindestens) einer Nullstelle, gibt aber kein Verfahren zur Berechnung einer solchen Nullstelle an.[11]

Voraussetzung $a, b \in \mathbb{R}$, f stetig an jeder Stelle von $[a; b]$, $f(a)\cdot f(b) \leq 0$.

Behauptung f hat im offenen Intervall]a,b[mindestens eine Nullstelle.

Beweisskizze Falls $f(a)\cdot f(b) = 0$ folgt sofort, dass eine Nullstelle vorliegt, nämlich bei a oder b. Es braucht also nur der Fall $f(a)\cdot f(b) < 0$ untersucht zu werden. Es wird angenommen, dass f in [a,b] keine Nullstelle hat. Dann ist auch die an jeder Stelle von [a,b] durch $h(x) := \frac{f(x)}{|f(x)|}$ definierte Funktion h stetig. OBdA gelte $f(x) < 0$ (sonst gehe man zur Gegenfunktion über); dann ist $h(a) = -1$.

Definiert man nun $s := \sup\{x \in [a,b] | h(x) = -1\}$, so ist s nicht größer als b. Da h über jeder Umgebung von s sowohl den Wert -1 wie auch den Wert 1 annimmt, kann h bei s nicht stetig sein. Mithin war die Annahme falsch und f hat mindestens eine Nullstelle.

Folgerungen

1. Eine über einem Intervall [a, b] stetige Funktion kann über diesem Intervall nur verschiedene Vorzeichen annehmen, wenn sie im Intervall eine Nullstelle hat: Ein Vorzeichenwechsel setzt (unter den gegebenen Voraussetzungen) das Vorliegen einer Nullstelle voraus.

[10] Manche werden die zur Definition der Koeffizienten von q verwendete Rekursion wiedererkannt haben: Dies ist das in der numerischen Mathemtik gut bekannte Horner-Schema zur Berechnung von Funktionswerten bei Polynomen.

[11] Je nachdem, welche Eigenschaften der reellen Zahlen der Beweis des Satzes verwendet, kann sich aus dem Beweisweg auch gleichzeitig ein Verfahren zur Berechnung ergeben; so etwa, wenn die Definition der reellen Zahlen mit Hilfe von Intervallschachtelungen verwendet wird.

2. Ein Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle. Dazu sei $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Für betraglich hinreichend großes x ist $\sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{a_i}{x^{n-i}}\right|$ positiv; wegen

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = x^n \cdot (1 - \sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{a_i}{x^{n-i}}\right|) \quad \wedge \quad \lim_{x \to \infty} (1 - \sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{a_i}{x^{n-i}}\right|) = 1$$

stimmen für betraglich große Werte von x die Vorzeichen von $p(x)$ und x^n überein. Ist also der Grad n ungerade, nimmt die Funktion positive und negative Werte an und hat somit auch mindestens eine Nullstelle.

6.1.3 Der Fixpunktsatz für stetige Funktionen

Jede stetige Funktion, die ein abgeschlossenes Intervall in sich abbildet, hat mindestens einen Fixpunkt. Zum Nachweis seien a, b ($a < b$) reelle Zahlen; die Argumentmenge der Funktion f enthalte das Intervall $[a, b]$, und für jedes $x \in [a, b]$ gelte $f(x) \in [a, b]$. Dann hat f mindestens einen Fixpunkt in $[a; b]$, d. h. es gibt im Intervall $[a, b]$ eine reelle Zahl - sie heiße z.B. ξ mit der Eigenschaft $f(\xi) = \xi$.

Zum Nachweis braucht man nur zu beachten, dass die Gleichungen $f(\xi) = \xi$ und $f(\xi) - \xi = 0$ äquivalent sind. Die durch $h(x) = f(x) - x$ definierte Funktion h ist stetig und erfüllt die Voraussetzungen des Nullstellensatzes wegen $h(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ und $h(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$, was die Existenz des gesuchten Stelle ξ sichert.

Bemerkung Genau wie der Nullstellensatz liefert der Fixpunktsatz nur eine Existenzaussage, aber kein Verfahren zu konkreten Berechnung des Fixpunkts.

6.1.4 Der Fixpunktsatz für differenzierbare Funktionen

Wenn die Wertmenge einer differenzierbare Funktion f eine Teilmenge der (hier als abgeschlossenes Intervall [a, b] vorausgesetzten) Argumentmenge von f ist und eine Zahl $\lambda \in]0; 1[$ existiert, die an keiner Stelle des Intervalls $x \in]a, b[$ von $|f'(x)|$ übertroffen wird, dann gilt:

1. Die Funktion f hat in [a, b] genau einen Fixpunkt ξ.
2. Definiert man eine Folge (a_n) rekursiv durch

$$a_0 := a \quad \wedge \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} := f(a_n),$$

dann konvergiert die Folge (a_n) gegen den Fixpunkt ξ.

Dabei ist die Exitenz mindestens eines Fixpunkts durch den Fixpunktsatz für stetige Funktionen gesichert. Gäbe es zwei Fixpunkte ξ_1, ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$), so folgte

$$\frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = 1.$$

Aber im Widerspruch dazu folgt nach dem Mittelwertsatz für eine geeignete Stelle c im Intervall $]\xi_1, \xi_2[$

$$\frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = f'(c) < 1.$$

Die Funktion f hat also genau einen Fixpunkt, der nachfolgend wieder mit ξ bezeichnet werde. Für die Folge (a_n) gilt nun (aufgrund des Mittelwertsatzes)

$$|a_{n+1} - \xi| = |f(a_n) - f(\xi)| = |(a_n - \xi) \cdot f'(c_n)| \leq |(a_n - \xi)| \cdot \lambda.$$

Mit c_n wird dabei eine im Sinne des Mittelwertsatzes geeignete Stelle des Intervalls mit den Endpunkten a_n und ξ bezeichnet. Aus der angegebenen Rekursion ergibt sich durch Induktion die für alle Indizes n geltende Abschätzung

$$|a_{n+1} - \xi| \leq |a - \xi| \cdot \lambda^{n+1}, \quad \text{also} \quad |a_{n+1} - \xi| \leq (b - a) \cdot \lambda^{n+1}$$

Wegen $|\lambda| < 1$ ist die geometrische Folge (λ^n) eine Nullfolge, womit die Konvergenz von (a_n) gegen den Fixpunkt ξ bewiesen ist.