Die reellen Lösungen der kubischen Gleichung

Klaus-R. Löffler

Inhaltsverzeichnis

1 Einfach zu behandelnde Sonderfälle

In speziellen Fällen lassen sich Gleichungen dritter (und höherer) Ordnung mit besonders einfachen Mitteln lösen. Dabei wird von der normierten Form

(1) $\quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

ausgegangen. Solche einfachen Möglichkeiten liegen zum Beispiel beim Fall einer reinen Potenzgleichung (also $b = c = 0$) mit der einzigen Lösung[1] $x = \sqrt[3]{-d}$ vor. Eine Reduktion auf die Aufgabe, eine quadratische Gleichung zu lösen, erfolgt beim

Ausklammern eines Linearfaktors: Nach dem Divisionssatz für Polynome gibt es zu einer reellen Zahl a genau dann reelle Zahlen v, w, so dass die Identität

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x - a) \cdot (x^2 + vx + w)$$

gilt, wenn a eine Lösung der Gleichung (1) ist.

Diese Möglichkeit ist sofort im Fall $d = 0$ zu sehen. In den anderen Fällen ist das Vorliegen einer solchen Möglichkeit dann leicht zu überprüfen, wenn alle Koeffizienten in (1) ganze Zahlen sind. Denn wenn die Gleichung $a^3 + b^2a^2 + ca + d = 0$ mit ganzzahligen a, b, c, d gilt, muss d offenbar ein Vielfaches von a sein. Es reicht also, bei allen Teilern von d (und ihren Gegenzahlen) zu prüfen, ob sie Lösungen der Gleichung sind, um dann entweder die Gleichung durch Polynomdivision zu reduzieren oder die Existenz ganzzahliger Nullstellen ausschließen zu können.

[1] Wie an späterer Stelle noch einmal erwähnt, wird hier das Ziehen der dritten Wurzel als Umkehrung zum Bilden der dritten Potenz aufgefasst, als Argumente werden also auch negative Zahlen zugelassen.

2 Die ganzrationale Funktion dritten Grades

2.1 Reduktion

In dieser Zusammenstellung wird die Parabel dritter Ordnung hinsichtlich ihrer Nullstellen untersucht. Da diese Nullstellen invariant gegenüber einer Multiplikation des Funktionsterm mit einem reellen - von null verschiedenen - Faktor sind, darf man annehmen, dass die Funktionsgleichung in normierter Form vorliegt:

$$g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

Durch die Substitution $x = y - \frac{b}{3}$ erhält man

$$\begin{aligned} f(y) = g(y - \frac{b}{3}) &= (y - \frac{b}{3})^3 + b(y - \frac{b}{3})^2 + c(y - \frac{b}{3}) + d \\ &= y^3 + \frac{b^2}{3}y - \frac{b^3}{27} - \frac{2}{3}b^2 y + \frac{b^3}{9} + cy - \frac{bc}{3} + d \\ &= y^3 + (c - \frac{b^2}{3})y + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d \end{aligned}$$

Damit hat f die Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 + px + q \quad \text{mit} \quad p = c - \frac{b^2}{3},\ q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d.$$

Genau dann ist x Nullstelle von f, wenn $x - \frac{b}{3}$ Nullstelle von g ist.

2.2 Der Sonderfall $q = 0$

Im Fall $q = 0$ besteht die Nullstellenmenge von f aus $x_1 = 0$ und den Lösungen der Gleichung $x^2 + p = 0$ dies sind für $p \geq 0$ keine Nullstellen und für $p < 0$ die Nullstellen $x_2 = -\sqrt{-p}$, $x_3 = \sqrt{-p}$.

Ergebnis Im Sonderfall $q = 0$, also $\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = 0$ hat die Gleichung $x^3 + bx^2 + cx + d$ mit $p = c - \frac{b^2}{3}$ die folgenden Lösungen:

- Falls $p \geq 0$: $x = -\frac{b}{3}$,
- falls $p < 0$: $x_1 = -\sqrt{-p} - \frac{b}{3},\ x_2 = -\frac{b}{3},\ x_3 = \sqrt{-p} - \frac{b}{3}$.

Nachfolgend wird also der Fall $q = 0$ ausgeschlossen[2].

2.3 Die Lage der waagerechten Tangenten an den Graphen von f

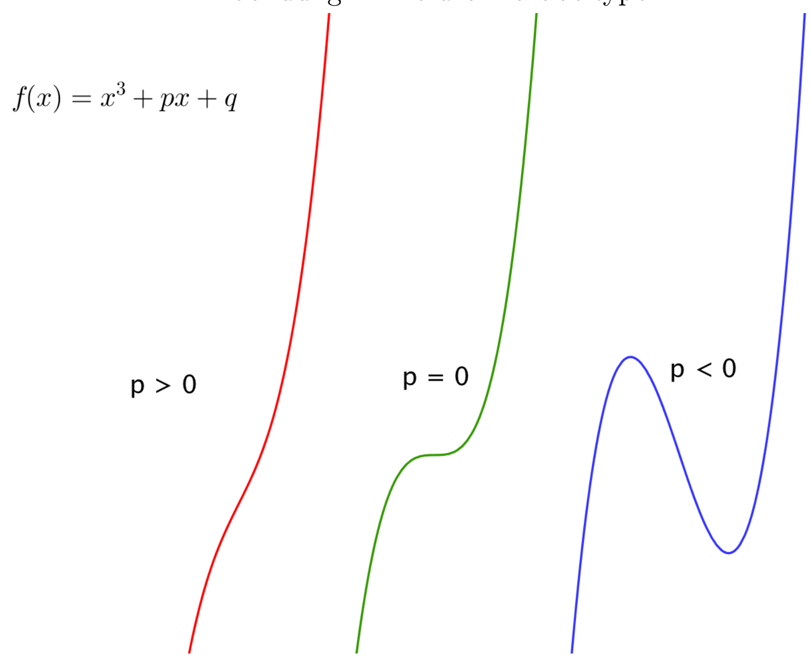
Wegen $f'(x) = 3x^2 + p$ hat der Graph von f genau dann waagerechte Tangenten, wenn p nicht positiv sind; genauer folgt:

(1) Im Fall $p > 0$ hat der Graph von f keine waagerechte Tangente.

(2) Der Graph hat genau eine waagerechte Tangente im Fall $p = 0$; die waagerechte Tangente wird dann an der Stelle 0 (nämlich im Punkt mit dem Koordinatenpaar $(0; q)$) angenommen.

(3) Der Graph hat genau zwei waagerechte Tangenten im Fall $p < 0$, nämlich dann an den Stellen $x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ und $x_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$.

Abbildung 1: Die drei Parabeltypen



3 Die drei Typen der kubischen Gleichung

Die drei Fälle werden nachfolgend untersucht.

3.1 Der Fall des Graphenverlaufs ohne waagerechte Tangenten ($p > 0$)

Ausgehend von der Gleichung $y^3 + py + q = 0$ ergibt sich mit den Hilfsvariablen u, v aus dem Ansatz $y = u - v$

$$y^3 = (u-v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 \quad (= u^3 - v^3 - 3uv(u-v) = u^3 - v^3 - 3uv \cdot y)$$

durch Koeffizientenvergleich mit $y^3 = -py - q$

$$p = 3uv \wedge q = -u^3 + v^3 \; .$$

Auflösen der ersten Gleichung nach v und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$q = -u^3 + \left(\frac{p}{3u}\right)^3, \quad \text{also} \quad u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Diese - bezüglich u^3 - quadratische Gleichung hat die Diskriminante $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$, so dass folgt:

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \quad \text{und damit} \quad v^3 = q + u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \; .$$

Dabei müssen die Wurzeln wegen $v^3 - u^3 = q$ jeweils mit gleichem Vorzeichen genommen werden, so dass sich als Lösung ergibt:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

[2],was nicht ausschließt, dass sich bei den folgenden Fällen nicht auch der Spezialfall $q = 0$ subsummieren ließe.

Bemerkung Bei Wahl des anderen Vorzeichens vor der Wurzel erhält man das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned} y_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}=y \end{aligned}$$

Ergebnis Als einzige reelle Lösung der Gleichung x^3+bx^2+cx+d ergibt sich mit $p := c-\frac{b^2}{3}$ und $q := \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$ im Falle $3c > b^2$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}-\frac{b}{3}$$

3.2 Der Fall des Graphenverlaufs mit genau einer waagerechte Tangenten $(p=0)$

Dieser Fall wird wegen der besonderen Einfachheit gesondert behandelt; er ließe sich auch als Spezialfall des - dann auf $p \geq 0$ erweiterten - ersten Falls behandeln. Im Fall $p=0$ reduziert sich die Gleichung auf $y^3+q=0$. Außerdem hat man

$$q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = \frac{2b \cdot 3c}{27} - \frac{bc}{3} + d = d - \frac{bc}{9} .$$

Ergebnis Als einzige reelle Lösung[3] der Gleichung x^3+bx^2+cx+d ergibt sich im Falle $3c = b^2$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{bc}{9}-d} - \frac{b}{3} .$$

3.3 Der Fall des Graphenverlaufs mit genau zwei waagerechte Tangenten $(p<0)$

Wie oben gezeigt, liegen dann die Tangenten bei $y_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ und $y_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$. Der Graph hat dann zwei relative Extrema, und von den Werten dieser Extrema hängt offenbar die Anzahl der reellen Lösungen ab:

- Haben beide Werte gleiches Vorzeichen, gibt es genau eine reelle Lösung.
- Verschwindet genau einer dieser beiden Werte, gibt es genau zwei reelle Lösungen.
- Ist das Produkt der beiden Werte negativ, gibt es drei reelle Lösungen.

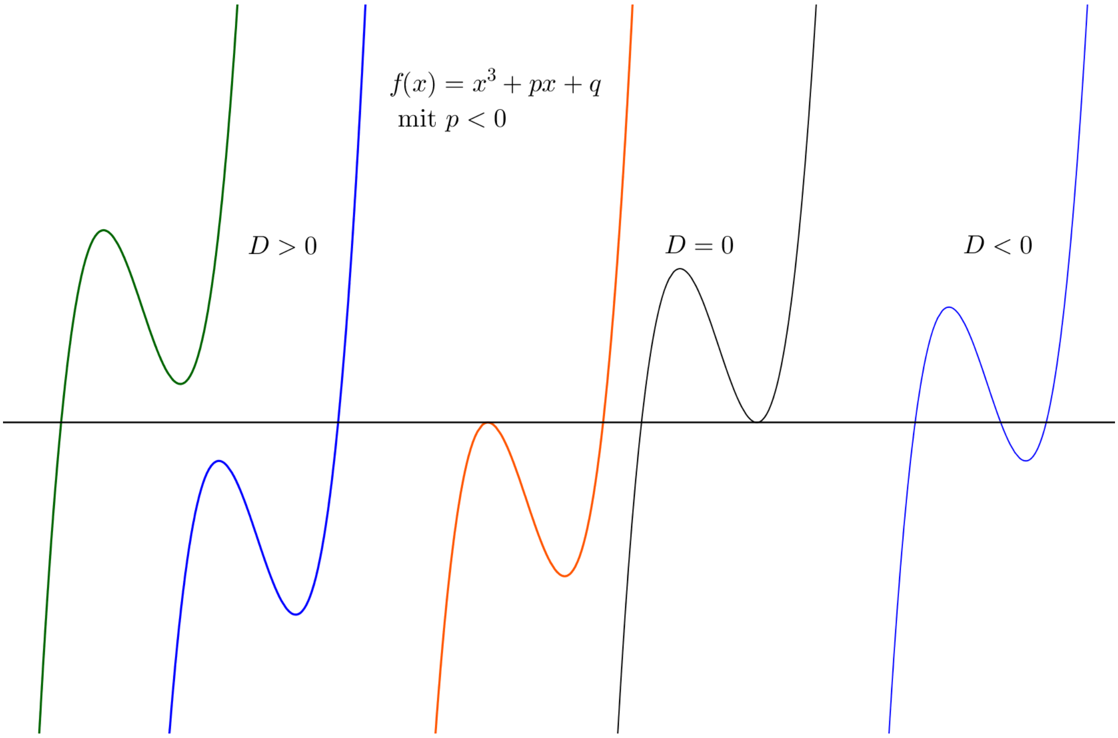
Zur entsprechenden Untersuchung werden die Funktionswerte bestimmt:

$$\begin{aligned} f(y_1) &= \left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p \cdot \left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) + q = \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q \\ f(y_2) &= \left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p \cdot \left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) + q = -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q \\ f(y_1)\cdot f(y_2) &= q^2+\frac{4}{27}p^3 = 4\cdot\left((\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3\right) \end{aligned}$$

Da das Vorzeichen von $(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$ entscheidend für die Anzahl der reellen Lösungen ist, wird dieser Wert auch als *Diskriminante* bezeichnet; er wird nachfolgend mit D abgekürzt notiert.

[3] Um formale Fallunterscheidungen zu vermeiden, wird in diesem Artikel die Kubikwurzel als Umkehrung der dritten Potenz verwendet, also nicht nur auf nicht-negative Radikanden eingeschränkt.

Abbildung 2: Die Fälle mit zwei waagerechten Tangenten



3.3.1 Der Unterfall $D > 0$

In diesem Fall haben die beiden Extrema der Funktion f gleiches Vorzeichen; es gibt also genau eine Lösung; diese wurde bereits mit der Methode aus dem Fall ohne waagerechte Tangenten gewonnen:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} - \frac{b}{3} .$$

3.3.2 Der Unterfall $D = 0$

Aus $D = 0$ folgt

$$q = \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \vee \quad q = -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} ,$$

wobei die Nullstelle mit der waagerechten Tangente im Fall $q < 0$ bei $y = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ sonst bei $y = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ liegt.

Ergebnis Im Fall $D = 0$ sind die beiden reellen Lösungen mit $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt[3]{4q} - \frac{b}{3}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-p}{3}} - \frac{b}{3}, \quad \text{falls } q > 0 , \\ x_2 &= \sqrt[3]{4q} - \frac{b}{3}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-p}{3}} - \frac{b}{3}, \quad \text{falls } q < 0 . \end{aligned}$$

3.3.3 Der Unterfall $D < 0$ - die trigonometrische Lösung

Hier hat die betrachtete Parabel dritter Ordnung zwei relative Extrempunkte auf verschiedenen Seiten der x-Achse; der Spezialfall, bei dem der Wendepunkt auf der x-Achse (und nach der Verschiebung dann im Ursprung) liegt, wurde oben bereits behandelt ($q = 0$). Ist aber q verschieden von 0, lässt sich der Fall nicht mehr durch algebraische Betrachtungen innerhalb der reellen Zahlen zufriedenstellend behandeln[4]. Dieser Fall wird daher auch als *casus irreducibilis* bezeichnet.
Substituiert man $a := 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$, $y := a \cdot z$, so erhält man

$$a^3z^3 + apz + q = 0\ , \quad \text{also} \quad 4z^3 + 4\frac{p}{a^2}z + 4\frac{q}{a^3} = 0$$

und somit wegen $a^2 = -\frac{4p}{3}\ , \quad a^3 = -\frac{8p}{3} \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}}$

$$(2) \qquad 0 = 4z^3 - 3z - \frac{3q}{2p} \cdot \sqrt{\frac{3}{-p}} = 0\ .$$

Wegen $D < 0$, also $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$ folgt $27q^2 + 4p^3 < 0$ und mithin $|\frac{27q^2}{4p^3}| < 1$. Nun ist

$$\left(\frac{3q}{2p} \cdot \sqrt{\frac{3}{-p}}\right)^2 = |\frac{27q^2}{4p^3}|\ .$$

Der Wert $-\frac{3q}{2p} \cdot \sqrt{\frac{3}{-p}}$ liegt also zwischen 0 und 1 und kann somit als Sinuswert eines Winkels gedeutet werden. Ein solcher Winkel sei mit 3α bezeichnet. Nach Division der Gleichung durch 4 hat man dann

$$z^3 - \frac{3}{4}z + \frac{\sin(3\alpha)}{4} = 0\ .$$

Aus der Trigonometrie ist bekannt

$$\sin(3\alpha) = 3 \cdot \sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha), \quad \text{also} \quad \sin^3(\alpha) - \frac{3}{4}\sin(\alpha) + \frac{\sin(3\alpha)}{4}\ .$$

Für jeden Winkel α mit $\frac{\sin(3\alpha)}{4} = -\frac{3q}{8p} \cdot \sqrt{\frac{3}{-p}}$, also $\sin(3\alpha) = -\frac{3q}{2p} \cdot \sqrt{\frac{3}{-p}}$ ist somit $\sin(\alpha)$ eine Lösung der Gleichung (1).
Wegen $\sin(3\alpha) = \sin(3 \cdot (\alpha + \frac{2}{3}\pi)) = \sin(3 \cdot (\alpha + \frac{4}{3}\pi))$ gibt es drei Winkel mit dieser Eigenschaft, also drei Lösungen.

$$\begin{aligned} 3\alpha &= \arcsin\left(\sqrt{-\frac{27q^2}{8p^3}}\right);\ \alpha = \frac{1}{3}\arcsin\left(\sqrt{-\frac{27q^2}{8p^3}}\right)\ ;\ z = \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\sqrt{-\frac{27q^2}{8p^3}}\right)\right) \\ y &= a \cdot z = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\sqrt{-\frac{27q^2}{8p^3}}\right)\right) \end{aligned}$$

Ist also α ein Winkel mit der Eigenschaft $\sin(3\alpha) = \sqrt{-\frac{27q^2}{8p^3}}$, so sind die Nullstellen von f

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \sin(\alpha),\ y_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \sin(\alpha + \frac{2}{3}\pi),\ y_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \sin(\alpha + \frac{4}{3}\pi)\ .$$

[4] Die Herleitung benötigt das Rechnen mit komplexen Zahlen, obwohl die Lösungen alle reell sind.

Ergebnis Hat in der kubischen Gleichung $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $p = c - \frac{b^2}{3},\ q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$ die Diskriminante $D = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$ einen negativen Wert, so gibt es genau drei reelle Lösungen. Mit $\alpha = \frac{1}{3} \arcsin \sqrt{-\frac{27q^2}{8p^3}}$ sind die Lösungen dann

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \sin(\alpha) - \frac{b}{3}\ , \\ x_2 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \sin(\alpha + \frac{2}{3}\pi) - \frac{b}{3}\ , \\ x_3 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \sin(\alpha + \frac{4}{3}\pi) - \frac{b}{3}\ . \end{aligned}$$

(Letzte Bearbeitung 2015-11-25)