MATHEMATIK Leistungskurs
1991-1993
- Zusammenfassung -

Fachlehrer: StD Klaus-R. Löffler
Städtisches Gymnasium Leichlingen

Zusammengestellt und in TEXgesetzt von Sascha Albers
Vorwort sowie Aufgabenstellungen und Lösungen der Klausuren hinzugefügt von Klaus-R. Löffler 2010

Leichlingen, im November 2002
Leverkusen, im November 2010

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Vorbemerkung

Die vorliegende Zusammenfassung gibt die wesentlichen Teile aus einem Leistungskurs Mathematik wieder, den ich ich Anfang der Neunzigerjahre des letzten Jahrhunderts am Leichlinger Gymnasium abgehalten habe. Damals umfasste der Leistungskurs noch sechs (anstatt fünf) Wochenstunden und begann bereits mit dem zweiten Halbjahr der Stufe 11. Ich bin meinem damaligen Schüler Sascha Albers sehr dankbar dafür, dass er die Inhalte dokumentiert hat, und habe nun - fast zwanzig Jahre nach Beginn dieses Leistungskurses - neben dieser Vorbemerkung noch in einem Anhang die Aufgabenstellungen aller Klausuren aus den fünf Kurshalbjahren hinzugefügt. Während die Beweise in der von Sascha Albers vorgenommenen Zusammenstellung konsequent weggelassen wurden und bei Interesse ja in der Standardliteratur nachzulesen sind, wurden hinter den Klausuraufgaben in einem weiteren Kapitel die kompletten Lösungen zu diesen Aufgaben angegeben - zumal ja ein Teil der Leser vielleicht auch den Erwartungsrahmen bei diesen Aufgaben kennenlernen möchte.

Kapitel 1

Mathematik 11/2

1.1 Klausur Nr. 1

1.1.1 Definitionen aus der Topologie

- Eine Menge M der Ebene heißt „Umgebung von a“, wenn es eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt a gibt, die ganz in M liegt.
- a heißt „innerer Punkt von M“ $:\Longleftrightarrow$ M ist Umgebung von a.
  (Menge aller inneren Punkte: M°; „Kern von M“)
- Das Komplement von M (in Zeichen $\tilde{M}$) besteht aus allen Punkten der Ebene die nicht zu M gehören.
- a heißt „Randpunkt zu M“ $:\Longleftrightarrow$ in jeder (noch so kleinen) Umgebung von a gibt es mindestens ein Element von M und mindestens ein Element von $\tilde{M}$.
  Menge aller Randpunkte: ∂M; „Rand von M“.
- a heißt „Häufungspunkt zu M“ $:\Longleftrightarrow$ in jeder Umgebung von a liegen mindestens zwei Punkte von M.
  (Menge aller Häufungspunkte: M’)
- a heißt „Berührpunkt zu M“ $:\Longleftrightarrow$ in jeder Umgebung von a liegt mindestens ein Element von M.
  (Menge aller Berührpunkte: $\bar{M}$; „Hülle von M“).

1.1.2 Die Rechengesetze in Q

Gegeben sei eine Menge M mit der Verknüpfung ∘:

1. Für je 2 Elemente $a, b \in$ M liegt auch $a \circ b$ in M.
2. *Kommutativgesetz:* Für $a, b \in$ M gilt $a \circ b = b \circ a$
3. *Assoziativgesetz:* Für $a, b, c \in$ M gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
4. Das neutrale Element
   (a) Es gibt in M ein neutrales Element n; für alle $a \in M$ gilt $a \circ n = a$
   (b) Zu jedem $a \in$ M gibt es ein $b \in$ M mit $a \circ b = n$.
   Bezeichnung: $b = a^{-1}$

Wenn die Punkte 1-4 erfüllt sind, dann heißt M bezüglich ∘ eine *kommutative Gruppe.*

$$(Q, +, \cdot) \text{ kommutativer Körper} \begin{cases} (Q, +) \text{ kommutative Gruppe} \\ (Q^*, \cdot) \text{ kommutative Gruppe} \\ \text{Für alle } a, b, c \in Q \text{ gilt} \\ \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ \quad \text{(Distributivgesetz)} \end{cases}$$

In Q ist eine Relation < erklärt: $a < b \Longleftrightarrow 0 < b - a$

1.1.3 Eigenschaften in $<$

1. $a \nless a$ (antireflexiv)
2. $a < b \Longrightarrow b \nless a$ (asymmetrisch)
3. $(a < b$ und $b < c) \Longrightarrow a < c$ (transitiv)

1.1.4 Beträge

$$|x| := \begin{cases} x, \text{ falls } x \geq 0 \\ -x, \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

Rechenregeln:

1. $\bigwedge_{x \in R} |x| \in R$
2. $|x| \geq 0; = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ („Summenungleichung“)
5. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ („Differenzenungleichung)“

1.1.5 Polynome

Ein Polynom ist ein Term der folgenden Form:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ (Normalform)}$$

Wobei folgendes gilt:

$$n \in N_0$$
$$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_0 \in R \text{ (Koeffizient des Polynoms)}$$

Falls $a_n \neq 0$, heißt n der Grad des Polynoms.

1.1.6 Der Grenzwertbegriff

Vor.:

$$f : A \to R$$
$$c \in R, \lambda \in R$$
$$c \in A' (d.h. c \text{ ist Häufungspunkt zu A})$$

Def.: f hat bei c den Grenzwert λ

$:\Longleftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon \in R_+$ gibt es ein $\delta \in R_+$, so dass für alle x aus $A \cap]c - \delta, c + \delta[\setminus \{c\}$ gilt:

$$f(x) \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lambda$$

1.1.7 Das Äquivalenzprinzip

Vor.:

$$f : A \to R$$
$$c \in R; \lambda \in R$$
$$g : A \to R$$
$$x \mapsto f(x) - \lambda$$

Beh.:

$$\lim_{x \to c} g(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \lambda$$

Beweis:

1.1.8 Majorantensatz für Grenzwerte

Vor.:

$$f, g : A \to R$$
$$c \in A'$$
$$\lim_{x \to c} g(x) = 0$$
$$\bigwedge_{x \in A \setminus \{c\}} |f(x)| \leq |g(x)|$$

Beh.:

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0$$

Beweis:

1.1.9 Definition: Beschränktheit von Funktionen

Def.: f *beschränkt*
:$\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $r \in R$, so daß für alle $x \in A$ gilt: $|f(x)| \leq r$.
oder
:$\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $r \in R_+$, so daß gilt: $W_f \subseteq [r, -r]$
Def.: f *beschränkt über dem Intervall* $]u, v[$
:$\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $r \in R$, so daß für alle $x \in A \cap]u, v[$ gilt: $|f(x)| \leq r$.

1.1.10 Einschließungssatz für Grenzwerte

Vor.:

$$f, g, h : A \to R$$
$$c \in A'$$
$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) (=: \lambda)$$
$$\bigwedge_{x \in A \setminus \{c\}} g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

Beh.:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lambda$$

Beweis:
Allgemein gilt: Ist f eine ganzrationale Funktion (d.h. f(x) ist ein Polynom) und c ist ein Häufungspunkt ($c \in A'$), so gilt stets:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

1.1.11 Definition: Stetigkeit

Vor.:

$$f : A \to R$$
$$c \in A \cap A'$$

f stetig an der Stelle c

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{1. } f \text{ hat bei } c \text{ einen Grenzwert} \\ \text{2. Dieser Grenzwert ist } f(c) \end{cases}$$

Liegt c in $A \setminus A'$, ist c also isolierter Punkt, so ist f auch an dieser Stelle stetig
Eine Funktion heißt stetig, wenn sie an jeder Stelle c der Argumentmenge stetig ist

1.1.12 Definition: Differenzierbarkeit

Vor.:

$$f : A \to R$$
$$c \in A' \cap A$$
$$g(x) := \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ (Differenzenquotient)}$$

f heißt *„differenzierbar an der Stelle c"* genau dann, wenn g bei c einen Grenzwert hat; dieser Grenzwert wird als *Ableitung an der Stelle c* bezeichnet ($f'(c)$).

1.1.13 Wurzelregel für Grenzwerte

Vor.:

$$f : A \to R$$
$$c \in A'$$
$$\lambda \in R$$
$$\bigwedge_{x \in A} f(x) \geq 0 \ (W_f \subseteq R_+ \cup \{0\})$$
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lambda$$

Beh.:

$$1. \lambda \geq 0$$
$$2. \lim_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lambda}$$

Beweis:

1.1.14 Positivitätssatz für Grenzwerte

Vor.:

$$f : A \to R$$
$$c \in A'$$
$$\lambda \in R_+$$
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lambda$$

Beh.: Es gibt ein $\delta \in R_+$, so dass für alle $x \in]c - \delta, c + \delta[\cap A \setminus \{c\}$ gilt: $f(x) > 0$
Beweis:

1.1.15 Lokaler Wachstumssatz

Vor.:

$$f : A \to R$$
$$c \in A' \cap A$$
f bei c differenzierbar
$$f'(c) > 0$$

Beh.: Es gibt ein $\delta \in R_+$, so dass für alle $x \in]c - \delta, c + \delta[\cap A$ gilt:
1. für $x < c : f(x) < f(c)$
2. für $x > c : f(x) > f(c)$

Beweis:

1.1.16 Reziprokenregel für Grenzwerte

Vor.:

$$f : A \to R$$
$$c \in A'$$
$$\lambda \in R_+$$
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lambda$$
$$\bigwedge_{x \in A \setminus \{c\}} f(x) > 0$$
$$g : A \setminus \{c\} \to R$$
$$x \mapsto \frac{1}{f(x)}$$

Beh.:

$$\lim_{x \to c} g(x) = \frac{1}{\lambda}$$

Beweis:

1.1.17 Ableitungsregeln

Reziprokenregel

Vor.:

$$f : [a, b] \to R$$
$$c \in [a, b]$$
f bei c differenzierbar
W_f ist Teilmenge von R_+

Beh.:

1. $\frac{1}{f}$ bei c differenzierbar
2. $(\frac{1}{f})'(c) = -\frac{f'(c)}{f^2(c)}$

Produktregel

Vor.:

$$f, g : [a, b] \to R$$
$$c \in [a, b]$$
f, g bei c differenzierbar

Beh.:

1. $f \cdot g$ bei c differenzierbar
2. $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$

Quotientenregel

Vor.:

$$f, g : [a, b] \to R$$
$$\bigwedge_{x \in A} g(x) \neq 0$$
$$c \in [a, b]$$
$$f, g \text{ bei } c \text{ differenzierbar}$$

Beh.:

1. $\frac{f}{g}$ bei c differenzierbar
2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g^2(c)}$

Faktorregel

Vor.:

$$f : [a, b] \to R$$
$$c \in [a, b]$$
$$f \text{ bei } c \text{ differenzierbar}$$
$$k \in R$$

Beh.:

1. $k \cdot f$ bei c differenzierbar
2. $(k \cdot f)'(c) = k \cdot f'(c)$

Summenregel

Vor.:

$$f, g : [a, b] \to R$$
$$c \in [a, b]$$
$$f, g \text{ bei } c \text{ differenzierbar}$$

Beh.:

1. $f + g$ bei c differenzierbar
2. $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

Potenzregel

Vor.:

$$f : [a, b] \to R$$
$$c \in [a, b]$$
$$n \in N$$
$$x \mapsto x^n$$

Beh.:

1. f bei c differenzierbar
2. $f'(c) = n \cdot c^{n-1}$

Beweise: [können]

1.1.18 Die Verallgemeinerung der 3. Binomischen Formel

[-siehe 2.1.23, Seite 28]

1.1.19 Definition: nach oben beschränkt (Mengen)

Def.: M *nach oben beschränkt*
:$\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $s \in R$, so daß für alle $x \in M$ gilt: $x \leq s$.
Die Zahl s heißt in diesem Fall „eine obere Schranke zu M“
Der Begriff „untere Schranke“ wird analog definiert.

1.1.20 Definition: Maximum von Mengen

Vor.:

$$M \subseteq R$$
$$s \in R$$

Def.:

$$s \text{ } Maximum \text{ } von \text{ } M :\Longleftrightarrow \begin{cases} 1. \ s \text{ ist obere Schranke zu } M \\ 2. \ s \in M \end{cases}$$

1.1.21 Vollständigkeitsaxiom

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von R hat eine kleinste obere Schranke. Diese wird als „Supremum von M“ bezeichnet (größte untere Schranke: „Infimum von M“).

$$s = \ sup \ M :\Longleftrightarrow \begin{cases} 1. \ s \text{ ist obere Schranke zu } M \\ 2. \text{ Jede Zahl die kleiner ist als } s, \\ \quad \text{ist keine obere Schranke mehr.} \end{cases}$$

1.1.22 Axiom des Archimedes

Zu jeder positiven reellen Zahl gibt es einen Stammbruch, der kleiner ist.

1.1.23 Nullstellensatz

Vor.:

$$f : [a, b] \to R, \text{ stetig}$$
$$f(a) < 0 < f(b)$$

Beh.:
f hat mindestens eine Nullstelle
Beweis:

1.2 Klausur Nr. 2

1.2.1 Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Vor.:

$$f : [a, b] \to R, \text{ stetig}$$
$$\lambda \in R$$
$$f(a) < \lambda < f(b)$$

Beh.:
Es gibt ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \lambda$
Beweis:

1.2.2 Definition: Fixpunkt

Vor.:

$$f : A \rightarrow R$$
$$c \in R$$

Def.: c heißt *Fixpunkt von f*
$:\Longleftrightarrow f(c) = c.$

1.2.3 Fixpunktsatz für stetige Funktionen

Vor.:

$f : [a, b] \rightarrow R$, stetig
$W_f \subseteq [a, b]$ (also: $\bigwedge\limits_{x \in [a,b])} f(x) \in [a, b]$)

Beh.:
f hat mindestens einen Fixpunkt
Beweis:

1.2.4 Satz von Bolzano - Weierstrass

Jede unendliche, beschränkte Menge reeller Zahlen hat mindestens einen Häufungspunkt.

1.2.5 Satz über die Beschränktheit stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen

Vor.:

$f : [a, b] \rightarrow R$, stetig

Beh.:
f ist beschränkt
Beweis:

1.2.6 Satz vom Minimum und Maximum stetiger Funktionen

Vor.:

$f : [a, b] \rightarrow R$, stetig

Beh.:
f hat Maximum und Minimum
Beweis:

1.2.7 Definition: Minimum und Maximum von Funktionen

Vor.:

$f : [a, b] \rightarrow R$, stetig

Def.:
1. $\max f := \max W_f$
2. $\min f := \min W_f$

1.2.8 Definition: Hochpunkt von f

Vor.:

$f : [a, b] \to R$, stetig
$c \in [a, b]$

Def.:
$(c, f(c))$ *ist ein Hochpunkt des Graphen* $f :\Longleftrightarrow f(c) = \max f$

1.2.9 Satz von Rolle

Vor.:

$f : [a, b] \to R$, stetig
f differenzierbar über $]a, b[$
$f(a) = f(b) = 0$

Beh.:
Es gibt ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$
Beweis:

1.2.10 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Vor.:

$f : [a, b] \to R$, stetig
f differenzierbar über $]a, b[$

Beh.:
Es gibt ein $\xi \in]a, b[$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$
Beweis:

1.2.11 Definition: isoton

Vor.:

$f : A \to R$

Def.:
f *isoton* $:\Longleftrightarrow \bigwedge_{r,s \in A}(r \leq s \Rightarrow f(r) \leq f(s))$

1.2.12 1. Folgerung aus dem Mittelwertsatz

Vor.:

$f : [a, b] \to R, stetig$
f differenzierbar über $]a, b[$
$$\bigwedge_{x \in]a,b[} f'(x) = 0$$

Beh.:
f ist konstant
Beweis:

1.2.13 2. Folgerung aus dem Mittelwertsatz: Globaler Wachstumssatz

Vor.:

$f : [a, b] \to R$, stetig
f differenzierbar über $]a, b[$
$$\bigwedge_{x \in]a,b[} f'(x) > 0$$

Beh.:
f ist streng isoton
Beweis:

1.2.14 Kurvendiskussion

Hinreichendes Kriterium zum Vorliegen eines Tiefpunktes

Vor.:

$f : A \to R$
$c \in A^\circ$
f bei c zweimal differenzierbar
$f''(c) > 0; f'(c) = 0$

Beh.:
Der Graph von f hat bei c einen relativen Tiefpunkt
Beweis:

Krümmungsverhalten

- f' antiton: Graph(f) rechtsdrehend
- f' isoton: Graph(f) linksdrehend

1.2.15 Die Kettenregel der Differentialrechnung

Vor.:

$f : A_f \to R$
$g : A_g \to R$
$c \in A'_f \cap A_f$
f bei c differenzierbar
$f(c) \in A_g \cap A'_g$
g ist differenzierbar bei $f(c)$
$W_f \subseteq A_g$

Beh.:
1. $g \circ f$ bei c differenzierbar
2. $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$

Beweis:

1.2.16 Definition: Umgebung von ∞

Def.:
M Umgebung von ∞
$:\Longleftrightarrow \bigvee_{r \in R}]r, \infty[\subseteq M$
$:\Longleftrightarrow$ Es gibt einen Oberabschnitt von R, der ganz in M liegt

1.2.17 Definition: injektiv

Vor.: $f : A \to R$
Def.:

$$f \text{ injektiv} :\Longleftrightarrow \bigwedge_{x,w\in A} (x \neq w \Rightarrow f(x) \neq f(w))$$

1.2.18 Definition: Umkehrfunktion

Vor.:

$$f : A \to R, \text{ injektiv}$$
$$g : W_f \to R$$

Def.:

$$g \text{ Umkehrfunktion zu } f :\Longleftrightarrow \bigwedge_{x\in A} g(f(x)) = x$$

1.2.19 Die Exponentialfunktion exp

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion lautet:

$$g(t+h) = g(t) \cdot g(h)$$

Die Eigenschaften

Vor.:

$$g : R \to R, \text{ differenzierbar}$$
$$\bigwedge_{u,v\in R} g(u+v) = g(u) \cdot g(v)$$
$$g(0) = 1; g(1) =: e$$

Beh.:

1. $\bigwedge_{x\in R} g(x) \geq 0$
2. $\bigwedge_{x\in R} g(x) \neq 0$
3. $\bigwedge_{x\in R} \bigwedge_{n\in N} g(n \cdot x) = (g(x))^n$

Beweise:

Satz

Vor.:

$$f : R \to R$$
$$f(0) = 1$$
$$\bigwedge_{u,v\in R} f(u+v) = f(u) \cdot f(v)$$
$$f \text{ differenzierbar bei } 0$$
$$f'(0) = 1$$

Beh.: Die Funktion ist überall stetig

Die Rechenregeln

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f(x) \\
f(-x) &= \frac{1}{f(x)} \\
f(-n \cdot x) &= (f(x))^{-n} \\
f\left(\frac{p}{q} \cdot q\right) &= \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q \\
\sqrt[q]{f(p)} &= f\left(\frac{p}{q}\right) \\
f\left(\frac{p}{q}\right) &= \sqrt[q]{(f(1))^p}
\end{aligned}$$

Die Ableitung zu $\exp(x)$ ist: $\exp(x)$, d.h.: $f'(x) = f(x)$

Abschätzung von e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{4}{n}$$

1.2.20 Die Funktion ln

Die Funktion ln ist die Umkehrfunktion zu exp.
Ihre Funktionalgleichung lautet:

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$$

Die Ableitung von ln an der Stelle x ist: $\frac{1}{x}$

1.2.21 Die Ableitung der Betragsfunktion

Die Ableitung der Betragsfunktion abs an der Stelle x ist: $\operatorname{sign}(x)$

Kapitel 2

Mathematik 12/1

2.1 Klausur Nr. 1

2.1.1 Definition: Folge

Def.: Eine Funktion f: N $\to$ R heißt *Folge*.
Statt $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ schreibt man $\langle a_n \rangle$.

2.1.2 Geometrische Folge

Vor.:

$$a, q \in R^*$$
$$a_1 := a$$
$$\bigwedge_{n \in N} a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Beh.: $a_n = a \cdot q^{n-1}$

2.1.3 Arithmetische Folge

Vor.:

$$a, d \in R$$
$$a_1 := a$$
$$\bigwedge_{n \in N} a_{n+1} = a_n + d$$

Beh.: $a_n = a + (n-1) \cdot d$

2.1.4 Eigenschaften von Folgen

$\langle a_n \rangle$ nach oben beschränkt
$:\Longleftrightarrow \bigvee_{s \in R} \ \bigwedge_{n \in N} a_n \leq s$
$\langle a_n \rangle$ beschränkt
$:\Longleftrightarrow \bigvee_{r,s \in R} \ \bigwedge_{n \in N} a_n \in [r, s]$
$\langle a_n \rangle$ isoton
$:\Longleftrightarrow \bigwedge_{n \in N} a_n \leq a_{n+1}$
$\langle a_n \rangle$ injektiv
$:\Longleftrightarrow \bigwedge_{k,m \in N} (a_k = a_m \Rightarrow k = m)$

2.1.5 Definition: Umgebung

Vor.:

$$a \in R$$
$$M \subseteq R$$

Def.:

M *Umgebung von* $a :\Longleftrightarrow \bigvee_{\varepsilon \in R_+} \quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq M$

2.1.6 Definition: Grenzwert für Folgen

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \lambda$$

$:\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon \in R_+$ gibt es ein $r \in R$, so dass für alle $n \in N$ gilt:
$n \geq r \Longrightarrow a_n \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$.

oder

$$\bigwedge_{\varepsilon \in R_+} \bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{n \in N} (n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - \lambda| < \varepsilon)$$

2.1.7 Definition: Gaußklammer

$$[x] := max\{z \in Z | z \leq x\}$$

2.1.8 Satz (Zusammenhang: Konvergenz und Beschränktheit von Folgen)

Beh.:

1. Aus $\langle a_n \rangle$ beschränkt folgt nicht $\langle a_n \rangle$ konvergent (z.B. $a_n = (-1)^n$)
2. $\langle a_n \rangle$ konvergent $\Longrightarrow \langle a_n \rangle$ beschränkt

Beweis:

2.1.9 Satz

Vor.:

$\langle a_n \rangle$ isoton, beschränkt

Beh.:

1. $\langle a_n \rangle$ konvergent
2. $\lim_{x\to\infty} a_n = \sup\langle a_n \rangle$

Beweis:

2.1.10 Definition: A $\leq$ B

Vor.:

$$A, B \subseteq R$$

Def.:

$$A \leq B :\Longleftrightarrow \bigwedge_{a \in A} \bigwedge_{b \in B} \quad a \leq b$$

2.1.11 Hilfssatz

Vor.:

$$\begin{aligned} A, B \subseteq R, &\neq \emptyset \\ A &\leq B \end{aligned}$$

Beh.:
$\sup A \leq \inf B$
Beweis:

2.1.12 Majorantensatz für Folgen

Vor.:

$$\begin{aligned} \langle a_n \rangle \text{ Folge, } \langle b_n \rangle \text{ Nullfolge} \\ \bigwedge_{n \in N} |a_n| \leq |b_n| \end{aligned}$$

Beh.:
$\langle a_n \rangle$ ist Nullfolge
Beweis:

2.1.13 Satz

Vor.:

$$\begin{aligned} A, B &\subseteq R \\ A, B &\neq \emptyset \\ A &\leq B \end{aligned}$$

Beh.:
Genau dann gilt sup A = inf B, wenn es eine Folge $\langle a_n \rangle$ in A und eine Folge $\langle b_n \rangle$ in B gibt, so dass $\langle b_n - a_n \rangle$ eine Nullfolge ist.
Beweis:

2.1.14 Merke 1

$$\ln(x) \leq x - 1$$

2.1.15 Grenzwertsätze für Folgen

Summensatz, Produktsatz

Vor.:

$$\begin{aligned} \langle a_n \rangle &\to a \\ \langle b_n \rangle &\to b \end{aligned}$$

Beh.:

$$\begin{aligned} \langle a_n + b_n \rangle &\to a + b \\ \langle a_n \cdot b_n \rangle &\to a \cdot b \end{aligned}$$

Beweis.:

Einschließungssatz

Vor.:

$$\langle a_n \rangle \to a$$
$$\langle c_n \rangle \to a$$
$$\bigwedge_{n \in N} a_n \leq b_n \leq c_n$$

Beh.:

$$\langle b_n \rangle \to a$$

Beweis.:

Reziprokensatz

Vor.:

$$\langle a_n \rangle \to a$$
$$a \neq 0$$
$$\bigwedge_{n \in N} a_n \neq 0$$

Beh.:

$$\langle \frac{1}{a_n} \rangle \to \frac{1}{a}$$

Beweis.:

Wurzelsatz

Vor.:

$$\langle a_n \rangle \to a$$
$$\bigwedge_{n \in N} a_n \geq 0$$

Beh.:

$$a \geq 0 \quad \wedge \quad \langle \sqrt{a_n} \rangle \to \sqrt{a}$$

Beweis.:

2.1.16 Das Prinzip der vollständigen Induktion

$A(n)$ ist eine Aussage über n
Um zu zeigen, dass die Aussage A(n) für alle natürlichen Zahlen gilt, also:

$$\bigwedge_{n \in N} A(n)$$

beweist man:

1. $A(1)$
2. $\bigwedge_{m \in N} \quad (A(m) \longrightarrow A(m+1))$

2.1.17 Bernoullische Ungleichung

Vor.:

$$\begin{aligned} n &\in N \\ a &\in R \\ a &\geq -1 \end{aligned}$$

Beh.:

$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$$

Beweis.: [WICHTIG!]

2.1.18 Das Summenzeichen

Vor.:

$$a_1, a_2, a_3, ... \in R$$

Def.:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \text{ und } \bigwedge_{n \in N} \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}$$

2.1.19 Wichtige Summenformeln

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2} \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{2.3}$$

Beweis:

2.1.20 Rechenregeln mit $\sum$

$$b \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b \cdot a_i \quad \textit{Distributivgesetz} \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \quad \textit{Kommutativgesetz} \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \textit{Assoziativgesetz} \tag{2.3}$$

2.1.21 Satz

Vor.:

$$|q| > 1$$

Beh.:

q^n ist divergent

Beweis: [können]

2.1.22 Satz

Vor.:

$$|q| < 1$$

Beh.:

q^n ist Nullfolge

Beweis: [können]

2.1.23 Die Verallgemeinerung der 3. Binomischen Formel

Vor.:

$$q \neq 1$$
$$q \in R$$

Beh.:

$$\bigwedge_{n \in N} \quad \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Beweis:

2.1.24 „Brandt"-Satz

Vor.:

$$q \neq 1$$
$$a, q, d \in R$$

$\langle a_n \rangle$ wird definiert durch

$$a_1 := a \text{ und } \bigwedge_{n \in N} a_{n+1} = q \cdot a_n + d$$

Beh.:

$$\bigwedge_{n \in N} a_n = q^{n-1} \cdot \left(a + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1}$$

Beweis:

2.1.25 Definition: Zerlegung

Def.: *Zerlegung*
Eine Zerlegung $\Im$ eines Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Folge $\langle x_0, x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ mit $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n = b$

2.1.26 Definition: Unter- und Obersumme

Vor.:

$f : [a, b] \to R$, beschränkt
$\Im$ sei eine Zerlegung von [a,b]
$$\Im = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$$

Def.:

$$U_{(f,\Im)} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f|_{[x_{i-1},x_i]}$$
(Untersumme von f zur Zerlegung $\Im$)
$$O_{(f,\Im)} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot \sup f|_{[x_{i-1},x_i]}$$
(Obersumme von f zur Zerlegung $\Im$)

2.1.27 Hilfssatz

Vor.:

$A, B \subseteq R, \neq \emptyset$
$A \subseteq B$
B beschränkt

Beh.:

$\inf A \geq \inf B$

Beweis:

2.1.28 Hilfssatz

Vor.:

$f : [a, b] \to R,$ beschränkt
$\Im$ Zerlegung von $[a, b]$

Beh.:

$U_{(f,\Im)} \leq O_{(f,\Im)}$

Beweis:

2.1.29 Merke 2

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

2.1.30 Hilfssatz

Vor.:
f beschränkt über $[a, b]$
$\Im_1, \Im_2$ Zerlegungen von $[a, b]$
$\Im_2$ entsteht aus $\Im_1$ durch Hinzunahme eines weiteren Zerlegungspunktes
Beh.:

$U_{(f,\Im_2)} \geq U_{(f,\Im_1)}$
$O_{(f,\Im_2)} \leq O_{(f,\Im_1)}$

Beweis:

2.1.31 Hilfssatz

Vor.:

$$\begin{aligned} f : [a,b] \to R, &\text{ beschränkt} \\ \Im_1, \Im_2 &\text{ Zerlegungen von } [a,b] \end{aligned}$$

Beh.:

$$U_{(f,\Im_1)} \leq O_{(f,\Im_2)}$$

Beweis:

2.1.32 Definition: Integral

Def.:

$$\begin{aligned} \underline{\int} f \quad &:= \quad \{U_{(f,\Im)} | \Im \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \quad \textit{(Unterintegral von } f\textit{)} \\ \overline{\int} f \quad &:= \quad \{O_{(f,\Im)} | \Im \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \quad \textit{(Oberintegral von } f\textit{)} \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned} U := \sup\{U_{(f,\Im)} | \Im \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \\ O := \inf\{O_{(f,\Im)} | \Im \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \\ U \leq O \Longrightarrow \sup U \leq \inf O \\ \Longleftrightarrow \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \end{aligned}$$

2.1.33 Definition: integrierbar

Vor.:

$$f : [a,b] \to R, \text{ beschränkt}$$

Def.: f *integrierbar* $:\Longleftrightarrow \underline{\int} = \overline{\int}$

Der gemeinsame Wert von Ober- und Unterintegral heißt dann „Integral von f“.

2.1.34 Beispiel einer nicht-integrierbaren Funktion

$$\begin{aligned} f : [0,1] \to R \\ x \mapsto \begin{cases} 1, \text{ falls } x \text{ rational} \\ 0, \text{ falls } x \text{ irrational} \end{cases} \end{aligned}$$

Beh.: f nicht integrierbar

Beweis:

2.1.35 Hilfssatz

Vor.:

$$\begin{aligned} A, B &\subseteq R \\ A, B &\neq \emptyset \\ A &\leq B \end{aligned}$$

Beh.: Die folgenden Aussagen (1) und (2) sind äquivalent:

(1) $\bigwedge_{\varepsilon \in R_+} \bigvee_{a \in A} \bigvee_{b \in B} (b - a) < \varepsilon$

(2) $\sup A = \inf B$

Beweis:

2.1.36 Riemannsches Integrabilitätskriterium

Vor.:

$f : [a, b] \to R,$ beschränkt

Def.: f *integrierbar*
$\Longleftrightarrow$ Für alle $\varepsilon \in R_+$ gibt es eine Zerlegung $\Im$ von $[a, b]$, mit $(O_{(f,\Im)} - U_{(f,\Im)}) < \varepsilon$

2.2 Klausur Nr. 2

2.2.1 Definition: Feinheit einer Zerlegung $\Im(\delta_{(\Im)})$

$\Im$ sei eine Zerlegung von [a,b].
Unter der Feinheit von $\Im$ versteht man:

$$max\{x_i - x_{i-1} | i \in \{1, 2, 3, ..., n\}\}$$

2.2.2 Satz

Vor.:

$$\begin{aligned} f : [a,b] \to R, &\text{ integrierbar} \\ (\Im_n) \text{ Folge von Zerlegungen von } [a,b] \\ (\delta_{(\Im_n)}) \text{ ist Nullfolge} \end{aligned}$$

Beh.:

$$U_{(f,\Im_n)} \to \int f \qquad (n \to \infty)$$

$$O_{(f,\Im_n)} \to \int f \qquad (n \to \infty)$$

Beweis: [-zu kompliziert (Zitat Lüffler)-]

2.2.3 Definition: „Zerlegung mit Zwischenpunkten“

$\Im'$ heißt Zerlegung von $[a,b]$ mit Zwischenpunkten, wenn gilt:

$$\Im' = (x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, x_2, ..., \xi_n, x_n)$$

mit $a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 ... \le \xi_n \le x_n = b$

2.2.4 Definition: „Riemannsche Summe R“

$$R_{(f,\Im')} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i)$$

Offensichtlich gilt:

$$U_{(f,\Im)} \le R_{(f,\Im')} \le O_{(f,\Im)}$$

Folgerung:
Wenn f über $[a,b]$ integrierbar ist, $(\Im'_n)$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit Zwischenpunkten und $(\delta_{(\Im'_n)})$ eine Nulllfolge ist, dann gilt:

$$R_{(f,\Im'_n)} \to \int f \qquad (n \to \infty)$$

2.2.5 Hilfssatz

Vor.:

$$f : [a,b] \to R, \text{ integrierbar}$$

Beh.:

$$(b-a) \cdot \inf(f) \le \int f \le (b-a) \cdot \sup(f)$$

Beweis:

2.2.6 Satz

Vor.:

$$f : [a,b] \to R, \quad a < c < b$$

Beh.:

(1) f integrierbar $\iff f|_{[a,c]}$ integrierbar und $f|_{[c,b]}$ integrierbar

(2) falls f integrierbar ist, gilt $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Beweis:

2.2.7 Merke 3

Vor.:

$$f : [a,b] \to R, \text{ integrierbar}$$

Beh.:

$$(1) \int\limits_a^a f(x)dx = 0$$

$$(2) \int\limits_b^a f(x)dx := -\int\limits_a^b f(x)dx$$

2.2.8 Satz

Vor.:

$$f : [a,b] \to R, \text{ integrierbar}$$
$$c, d, e \in [a,b] \text{ (in beliebiger Reihenfolge)}$$

Beh.:

$$\int\limits_c^d f(x)dx + \int\limits_d^e f(x)dx = \int\limits_c^e f(x)dx$$

Beweis:

2.2.9 Definition: Integralfunktion

$$f : [a,b] \to R, \text{ integrierbar}$$
$$c \in [a,b]$$
$$F : [a,b] \to R$$
$$x \mapsto \int\limits_c^x f(t)dt$$

F wird als Integralfunktion bezeichnet.

2.2.10 Allgemeine Bestimmung des Integrals einer bestimmten Funktion

Aufgabe:

$$\text{Bestimme } \int\limits_a^b cx^2 dx$$

Lüsung:

$$\int\limits_a^b cx^2 dx = \frac{1}{3} c \cdot \left(b^3 - a^3\right)$$

2.2.11 Definition: Mittelwert

$$f : [a, b] \to R, \text{ integrierbar}$$

Unter dem „Mittelwert von f“ versteht man den Ausdruck

$\frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$

2.2.12 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Vor.:

$$f : [a, b] \to R, \text{ stetig}$$

Beh.:

$$\bigvee_{\xi \in [a,b]} f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$$

Beweis:

2.2.13 Eigenschaften von Integralfunktionen

1. Jede Integralfunktion hat mindestens 1 Nullstelle (z.B. $F(c) = \int\limits_c^c f(t)dt = 0$)
2. Jede Integralfunktion ist stetig
3. Wenn $f(x) \geq 0$ (für alle $x \in [a, b]$), dann ist $F(x)$ isoton

Alle Beweise: [wichtig]

2.2.14 Hilfssatz

Vor.:

$$f : [a, b] \to R, \text{ stetig}$$
$$\bigwedge_{x \in [a,b]} f(x) \geq 0$$

Beh.:

$$\int\limits_a^b f(t)dt \geq 0$$

Beweis:

2.2.15 Definition: „gleichmäßig stetig“

f „gleichmäßig stetig auf [a,b]“
$:\Longleftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon\in R_+} \bigvee_{\delta\in R_+} \bigwedge_{d,x\in[a,b]} \quad (|x-d|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(d)|<\varepsilon)$

2.2.16 Satz: gleichmäßig stetig - stetig

Beh.: f stetig auf $[a,b] \Longrightarrow f$ gleichmäßig stetig auf $[a,b]$

2.2.17 Satz: Differenzierbarkeit von Integralfunktionen zu stetigem Integranten

Vor.:

$$\begin{aligned} f:[a,b]\to R,&\ \text{stetig}\\ c,d\in[a,b]&\\ F(x)=\int\limits_c^x f(t)dt& \end{aligned}$$

Beh.:

1. F ist bei d differenzierbar (F ist differenzierbar)
2. $F'(d)=f(d)$ $(F'=f)$

Beweis: [WICHTIG]

2.2.18 Definition: Stammfunktion

$$\begin{aligned} f:[a,b]&\to R\\ G:[a,b]\to R,&\ \text{differenzierbar} \end{aligned}$$

Def.: G „Stammfunktion zu f“ $:\Longleftrightarrow G'=f$

2.2.19 Integration stetiger Funktionen: HAUPTSATZ

Vor.:

$$\begin{aligned} f:[a,b]\to R,&\ \text{stetig}\\ G\ \text{Stammfunktion zu}\ f& \end{aligned}$$

Beh.:

$$\int\limits_a^b f(t)dt = G(b)-G(a) =: [G(x)]_a^b$$

Beweis:

2.2.20 Satz

Vor.:

$$f:[a,b]\to R,\ \text{gleichmäßig stetig}$$

Beh.:
f integrierbar
Beweis: [WICHTIG (Sonderaufgabe)]

2.2.21 Integrationsregeln

Vor.:

$$f, g : [a, b] \to R,\ \text{stetig}$$
$$c \in R$$

Beh.:

1. Homogenität von Integralen:
$$\int\limits_a^b (c \cdot f)(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$$
2. Additivität von Integralen:
$$\int\limits_a^b (f+g)(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

Beweise:

2.2.22 Merke 4

1. Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion (z.B. eine beliebige Integralfunktion).
2. Wenn eine Abbildung (Funktion) sowohl homogen als auch additiv ist, heißt sie linear.
3. Integrale sind nicht multiplikativ !

2.2.23 Regel über „Partielle Integration“

Vor.:

$$f, g : [a, b] \to R,\ \text{stetig differenzierbar}$$
$$\text{(d.h. } f, g \text{ differenzierbar; } f', g' \text{ stetig)}$$

Beh.:

$$\int\limits_a^b f'(t) \cdot g(t)dt = [f(t) \cdot g(t)]_a^b - \int\limits_a^b f(t) \cdot g'(t)dt$$

Beweis: [reproduzierbar, einfach]

2.2.24 Substitutionsregel

Vor.:

$$\phi : [\alpha, \beta] \to R,\ \text{stetig differenzierbar}$$
$$f : A \to R, \text{ stetig}$$
$$W_\phi \subseteq A$$

Beh.:

$$\int\limits_\alpha^\beta f'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = \int\limits_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(z)dz$$

Beweis: [WICHTIG]

2.2.25 Potenzregel für gebrochene Exponenten

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} \qquad \left(= \left(x^{\frac{1}{q}} \right)^p \right) \quad \Longrightarrow f'(x) = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Herleitung:

2.2.26 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Vor.:

$$\begin{aligned} f, g : [a, b] \to R, &\text{ stetig} \\ W_g \subseteq [0, \infty[& \end{aligned}$$

Beh.:

$$\bigvee_{\xi \in [a,b]} \quad \int\limits_a^b f(t) \cdot g(t) dt = f(\xi) \cdot \int\limits_a^b g(t) dt$$

Beweis: [reproduzierbar]

Kapitel 3

Mathematik 12/2

3.1 Klausur Nr. 1

3.1.1 Rotationskörpervolumina

Geg.:

$$f : [a,b] \to R, \text{ stetig}$$
$$\bigwedge_{x \in [a,b]} f(x) \geq 0$$
$$\text{Graph } (f) \text{ rotiert um die X-Achse}$$

Ges.: Volumen V des entstehenden Rotationskörpers.
Lösung:

$$V = \pi \cdot \int\limits_a^b f^2(t)dt$$

3.1.2 Allgemeine Volumenformeln

- Kegel: $V = \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h$
- Kugel: (Funktionszuord.-vorschr. (Kreis) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $A_f = [-r, r]$)
  $V = \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$

3.1.3 Merke 5

1. $\sqrt{a^2} = a$ (wenn $a \geq 0$), $-a$ (wenn $a < 0$)
2. Aufgabe: $f : [-r, r] \to R, x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$
   Gesucht: $\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$
3. Aufgabe: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt$

3.1.4 Rationale Funktionen

Def.: Eine Funktion heißt rational, wenn sich ihr Funktionsterm
als Quotient zweier Polynome schreiben läßt.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

(p, q ganzrationale Funktionen)

$$A_f = R \backslash O_q$$

$$O_f = O_p \backslash O_q$$

3.1.5 Definition: „Schiefe Asymptote“

Vor.:

$$f : A \to R$$

∞ ist Häufungspunkt von A

g ganzrationale Funktion

g heißt „zu f asymptotisch’ genau dann, wenn gilt

$$\lim_{x \to \infty} (f - g)(x) = 0$$

3.1.6 Partialbruchzerlegung

Ansatz:

$$\frac{ax + b}{(x - c) \cdot (x - d)} = \frac{A}{x - c} + \frac{B}{x - d}$$

3.1.7 Lineare Algebra - Folgen

Def.: Die Folge $\{1, 2, 3, \cdots, n\} \to R, i \mapsto f(i)$, wird dargestellt in der Form

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ \cdots \\ f(n) \end{pmatrix}$$

(Komponenten 1 bis n)

3.1.8 Definition: R^n

Def.: Die Menge aller Folgen der Länge n (d.h die n Komponenten haben) mit Werten in R wird als R^n bezeichnet.

3.1.9 Merke 1

Jeder Folge $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in R^2$ wird umkehrbar eindeutig die Verschiebung mit dem (Ver)Schiebepfeil $\overline{(0,0)(a_1, a_2)}$ zugeordnet.

3.1.10 Definition: „Ortspfeil“

Def.: Ein Ortspfeil ist ein Pfeil, der vom Ursprung des Koordinatensystems ausgeht.

3.1.11 R^2

In R^2 sind eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

3.1.12 Definition: Subtraktion von Vektoren

$$\bigwedge_{\vec{a},\vec{b}\in R^2} \quad \vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

3.1.13 Eigenschaften / Rechenregeln in R^2

Eigenschaften:

1. $\bigwedge_{\vec{a},\vec{b}\in R^2} \quad \vec{a} + \vec{b} \in R^2$
2. $\bigwedge_{\vec{a},\vec{b}\in R^2} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativgesetz)
3. $\bigwedge_{\vec{a},\vec{b}\in R^2} \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (Assoziativgesetz)
4. (a) Es gibt in R^2 ein neutrales Element $\vec{0}$, so daß für alle $\vec{a} \in R^2$ gilt $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
   (b) Zu jedem $\vec{a} \in R^2$ gibt es ein $\vec{b} \in R^2$ mit $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.
5. $\bigwedge_{r\in R} \quad \bigwedge_{\vec{a},\vec{b}\in R^2}: \quad r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$
6. $\bigwedge_{r,s\in R} \quad \bigwedge_{\vec{a}\in R^2}: \quad (r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$
7. $\bigwedge_{r,s\in R} \quad \bigwedge_{\vec{a}\in R^2}: \quad (r \cdot s)\vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a}$
8. $\bigwedge_{a\in R^2}: \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Eine Menge in der die Eigenschaften 1-8 erfüllt sind heißt Vektorraum. Ein Element des Vektorraums ist ein Vektor.
$(R^2, +, r\cdot)$ erfüllt die Gesetze (1) bis (8), ist damit ein Vektorraum.
Rechenregeln:

1. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
2. $r \cdot \vec{0} = \vec{0}$
3. $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Wichtig: Beweise!

3.1.14 Seitenhalbierende

Geg: $\triangle ABC$ und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Ges: $\gamma_a = \dfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}$

Wichtig: Herleitung!

3.1.15 Schwerpunkt

$$\vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \text{ (Dreieck)}$$
$$\vec{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \text{ (allgemein)}$$

Wichtig: Herleitung!

3.1.16 Parameterdarstellung

Beschreibung eines beliebigen Punktes x auf der Strecke AB.

$$\vec{x} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a})$$
$$r \in [0, 1]$$

r heißt „Parameter“

3.1.17 Definition: Linearkombination

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n \text{Vektoren}$$
$$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n \in R$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \vec{a}_i \quad \text{heißt eine Linearkombination der Vektoren } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$$

3.1.18 Definition: „trivial“

Eine Darstellung des Nullvektors heißt „trivial“
$(r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \cdots + r_n\vec{a}_n = \vec{0})$, wenn $r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = r_n = 0$.

3.1.19 Definition: „linear abhängig“

Vor.:

$$V \text{ Vektorraum}$$
$$n \in N$$
$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n \in V$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n$ „linear abhängig“, wenn es reelle Zahlen $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n \in R$ gibt, die nicht alle gleich 0 sind, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \vec{a}_i = \vec{0}$$

3.1.20 Hilfssätze

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n$ linear abhängig
   $\Longrightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}$ linear abhängig

2. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n, \vec{0}$ linear abhängig

3. $\vec{a}, \vec{a}$ linear abhängig

3.1.21 Lineare Abhängigkeit in R^2

$\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig $\iff$ $\vec{a}, \vec{b}$ proportional. (falls $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)

Satz

Vor.:

$$\begin{aligned} V \text{ Vektorraum} \\ \vec{a}, \vec{b} \in V \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ linear unabhängig} \end{aligned}$$

Beh.:

$\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ linear unabhängig

Beweis:

3.1.22 Definition: „Norm“

Unter der „Norm von $\vec{a}$“ versteht man die Länge eines Pfeils im Raum, bzw. in der Ebene, der $\vec{a}$ repräsentiert. (Bezeichnung: $||\vec{a}||$)

Die Norm des Vektors $\vec{a}$ (mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$): $||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Eigenschaften:

1. $|| \cdots || : R^2 \to R$
2. $\bigwedge_{\vec{a} \in R^2} \quad ||\vec{a}|| \geq 0; = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$
3. $\bigwedge_{\vec{a} \in R^2} \quad \bigwedge_{r \in R} ||r \cdot \vec{a}|| = |r| \cdot ||\vec{a}||$
4. $\bigwedge_{\vec{a}, \vec{b} \in R^2} \quad ||\vec{a} + \vec{b}|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$ (Summenungleichnung)

3.1.23 Definition: „Winkel zwischen Vektoren“

Vor.:

$$\begin{aligned} \vec{a}, \vec{b} \in R^2 \\ \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \end{aligned}$$

Def.: Unter dem Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den Winkel zwischen zwei vom gleichen Punkt ausgehenden Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

3.1.24 Definition: „Skalarprodukt $(*)$“

Vor.:

$$\begin{aligned} \vec{b}, \vec{c} \in R^3 \\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Def.:

$$\vec{b} * \vec{c} = b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + b_3 \cdot c_3$$

3.1.25 Kosinussatz

Vor.:

$$\vec{a}, \vec{b} \in R^n$$

Beh.:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}$$

Wichtig: Herleitung

3.1.26 Eigenschaften des Skalarproduktes

1. $\bigwedge_{\vec{a},\vec{b} \in R^3} \quad \vec{a} * \vec{b} \in R$
2. $\bigwedge_{\vec{a} \in R^3} \quad \vec{a} * \vec{a} \geq 0; = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
3. $\bigwedge_{\vec{a},\vec{b} \in R^3} \quad \vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$
4. $\bigwedge_{r \in R} \quad \bigwedge_{\vec{a},\vec{b} \in R^3} \quad (r \cdot \vec{a}) * \vec{b} = r \cdot (\vec{a} * \vec{b})$
5. $\bigwedge_{\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in R^3} \quad \vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$

3.1.27 Merke 2

$$||\vec{a}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}} \quad \text{für } \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3.1.28 Fußpunktformel

$$\vec{x} = \vec{a} - \frac{(\vec{a} - \vec{q}) * \vec{d}}{\vec{d} * \vec{d}} \cdot \vec{d}$$

wobei $\vec{a}$ der Aufpunktvektor der Geraden, $\vec{q}$ der Ortsvektor des Punktes, von dem das Lot auf die Gerade gefüllt wird und $\vec{d}$ der Richtungsvektor der Geraden ist.
Herleitung: [sehr wichtig]

3.1.29 Definition: „orthogonal“

Vor.:

$$\vec{a}, \vec{b} \in R^3$$

Def.:

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ orthogonal} :\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \text{ oder} \\ \vec{b} = \vec{0} \text{ oder} \\ \text{Repräsentant von } \vec{a} \quad \perp \\ \quad \text{Repräsentant von } \vec{b} \end{cases}$$

3.1.30 Satz (Orthogonalität von Vektoren)

$$\vec{a} \text{ orthogonal zu } \vec{b} \Longleftrightarrow \quad \vec{a} * \vec{b} = 0$$

3.1.31 Satz (Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks)

Beh.: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.
Herleitung: [Wichtig]

3.1.32 Merke 3

$$(\vec{a} * \vec{b})^2 \leq (\vec{a} * \vec{a}) \cdot (\vec{b} * \vec{b})$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} = [\ln(x)]_a^b = \ln(b) - \ln(a) \qquad \text{für } a, b > 0$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} = [\ln(-x)]_a^b = \ln(-b) - \ln(-a) \qquad \text{für } a, b < 0$$

3.1.33 Symmetrie

Def.:
Graph von f ist symmetrisch zum Punkt (u, v)
$:\Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in A} \quad f(2 \cdot u - x) = 2 \cdot v - f(x)$
Graph von f ist symmetrisch zum Ursprung
$:\Longleftrightarrow f(-x) = -f(x)$

3.2 Klausur Nr. 2

3.2.1 Geraden im Raum

Parameterdarstellung

$$g_i : \vec{x} = \vec{a}_i \ + r \cdot (\vec{b}_i - \vec{c}_i); \qquad (\vec{b}_i - \vec{c}_i) =: \vec{d}_i$$

Verhältnisse

g,h Geraden im Raum

	g $\parallel$ h	g $\not\parallel$ h
g $\cap$ h $= \{\}$	g,h parallel, verschieden	g,h windschief
g $\cap$ h $\neq \{\}$	g,h gleich	g,h haben genau einen gemeinsamen Punkt

Klassifizierung mit Hilfe vektorieller Daten

3.2.2 Ebenen im Raum

|| A,B,C Punkte im Raum
Wenn A,B,C nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, gibt es genau eine Ebene **E** durch A,B,C.

Parameterdarstellung

$$E : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{d_1} + s \cdot \vec{d_2}$$
$$(\vec{d_1} = \vec{b} - \vec{a}, \vec{d_2} = \vec{c} - \vec{a}), \text{ und } \vec{d_1}, \vec{d_2} \text{ lin. unabh.}$$

Bezeichnung

„auf einer gemeinsamen Geraden liegend“: kollinear
„in einer gemeinsamen Ebene liegend“: komplanar

3.2.3 Definition: Kreuzprodukt

Vor.:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in R^3,$$
$$\vec{a}, \vec{b} \text{ lin. unabhängig}$$

Def.:

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

3.2.4 Eigenschaften des Kreuzprodukts

1. $\bigwedge_{\vec{a},\vec{b}\in R^3} \quad \vec{a}\times\vec{b}\in R^3$
2. $\bigwedge_{\vec{a},\vec{b}\in R^3} \quad \vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$
   Folgerung: $\vec{a}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{a}) \Longrightarrow \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$
3. $\bigwedge_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in R^3} \quad \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
4. $\bigwedge_{r\in R} \quad \bigwedge_{\vec{a},\vec{b}\in R^3} \quad (r\cdot\vec{a})\times\vec{b} = r\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$
5. $\bigwedge_{\vec{a},\vec{b}\in R^3} \quad (\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ linear abhängig)

3.2.5 Volumenformeln

Pyramide

$$V = \frac{1}{6}\cdot|(\vec{a}\times\vec{b})*\vec{c}|$$

Parallelepiped (Spat)

$$V = |(\vec{a}\times\vec{b})*\vec{c}|$$

3.2.6 Definition: Spatprodukt

Vor.:

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in R^3$$

Def.:

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] := (\vec{a}\times\vec{b})*\vec{c}$ *„Spatprodukt von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$“*

3.2.7 Eigenschaften des Spatprodukts

1. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}]$
   $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = -[\vec{c},\vec{b},\vec{a}]$
2. $[r\cdot\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = r\cdot[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]$ (Beweis)
3. $[\vec{b},\vec{b},\vec{c}] = 0$
4. $[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}]$ (Beweis)

Allgemeine Ebenengleichung:

$$ax+by+cz+d=0 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

3.2.8 Definition: Normalenvektor

Vor.:

$$\vec{n}\in R^3, \neq\vec{0}$$

E Ebene mit Richtungsvektoren $\vec{u},\vec{z}$
($\vec{u},\vec{z}$ linear unabhängig)

Def.: $\vec{n}$ „Normalenvektor zu **E** “ $:\Longleftrightarrow$ $\vec{n}$ orthogonal zu $\vec{u}$ und orthogonal zu $\vec{z}$

3.2.9 Hessesche Normal(en)form

Die Gleichung $\vec{n} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ mit $||\vec{n}|| = 1$ heißt „Hessesche Normal(en)form“ der Ebenengleichung. ($\vec{a}$: Ortsvektor eines Punktes in **E** ; $\vec{n}$: Normalenvektor zu **E** ; $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)

3.2.10 1. Hilfssatz

Vor.:

$$\begin{aligned} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} &\in R^3 \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} &\text{ lin. unabhängig} \end{aligned}$$

Beh.:

$$\bigvee_{r,s,t \in R} \quad \vec{d} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

3.2.11 2. Hilfssatz

Vor.:

$$\begin{aligned} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} &\in R^3 \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} &\text{ lin. unabhängig} \\ r, s, t \in R; r', s', t' &\in R \\ \vec{d} &= r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} \\ \vec{d} &= r' \cdot \vec{a} + s' \cdot \vec{b} + t' \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

Beh.:

$$r = r', s = s', t = t'$$

3.2.12 Hilfssatz zum Spatprodukt

Vor.:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in R^3$$

Beh.:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{d} = [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{a} + [\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}]\vec{b} + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]\vec{c}$$

3.2.13 Satz: Vorbereitung zur Cramerschen Regel (1/2)

Vor.:

$$\begin{aligned} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ lin. unabh.,} &\in R^3 \\ \vec{d} &\in R^3 \end{aligned}$$

Beh.:

$$\begin{aligned} &\text{Die Gleichung } x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d} \text{ hat genau} \\ &\text{eine Lösung } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \text{ nämlich } \begin{pmatrix} \frac{[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \\ \frac{[\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \\ \frac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2.14 Satz: Vorbereitung zur Cramerschen Regel (2/2)

Vor.:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ lin. abh.}, \in R^3$$
$$\vec{d} \in R^3$$

Beh.:

Die Gleichung $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$ hat nicht genau eine Lösung.

3.2.15 Cramersche Regel

Gegeben sei das Gleichungssystem G_*:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

wird als Systemdeterminante D bezeichnet.

Genau dann hat das Gleichungssystem G_* eine eindeutige Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, wenn D verschieden von 0 ist.

Falls D $\neq$ 0, setzt man

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \tfrac{1}{D} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \right\}$$

3.2.16 Vandermondsche Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

3.2.17 Definition: Lineare Hülle

Vor.:

$$V \text{ Vektorraum}$$
$$n \in N$$
$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n \in V$$

Def.:

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n \rangle := \{\vec{x} | \bigvee_{r_1, r_2, \cdots, r_n \in R} \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} r_i \vec{a}_i\}$$

„Lineare Hülle“

Falls W ein Vektorraum ist, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n \in W$ und $W = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n \rangle$, heißt $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n$ „Erzeugendensystem von W“

Ein Erzeugendensystem (ES) ist genau dann minimal, wenn es linear unabhängig ist.

3.2.18 Definition: Vektorunterraum

$$U \textit{ Vektorunterraum zu } W := \begin{cases} W \text{ Vektorraum} \\ U \text{ Vektorraum} \\ U \subseteq W \end{cases}$$

3.2.19 Unterraumkriterium

Vor.:

$$\begin{aligned} (W, +, r\cdot) \text{ Vektorraum} \\ U \subseteq W \\ U \neq \{\} \\ U \text{ abgeschlossen bez. } + \\ U \text{ abgeschlossen bez. } r\cdot \end{aligned}$$

Beh.:

$$(U, +, r\cdot) \text{ Vektorraum}$$

3.2.20 Definition: „Lineare Hülle“ (allgemein)

Vor.:

$$\begin{aligned} V \text{ Vektorraum} \\ M \subseteq V \end{aligned}$$

Def.:

$$\langle M \rangle := \underbrace{\{\vec{x} \in V | \bigvee_{n \in N_0} \bigvee_{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in V} \bigvee_{r_1, r_2, \cdots, r_n \in R} \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} r_i \vec{a}_i\}}_{\text{„Lineare Hülle von M“}}$$

Bemerkungen:

- $\langle\langle M \rangle\rangle = \langle M \rangle$
- $M \subseteq \langle M \rangle$
- $\langle M \rangle$ ist ein Vektorunterraum von V

3.2.21 Definition: „Basis“

Unter einer Basis eines Vektorraums versteht man ein minimales Erzeugendensystem.

3.2.22 Definition: „Koordinaten bezüglich einer Basis“

Wenn $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$ eine Basis des Vektorraums V ist, gibt es zu jedem $\vec{x} \in V$ Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in R$ mit

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{b}_i$$

Diese Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ heißen „Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$“.

3.2.23 Satz

Vor.:

$$\begin{aligned} V &\text{ Vektorraum} \\ n &\in N \\ \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\} &\text{ Erzeugendensystem von } V (=: S) \end{aligned}$$

Beh.:

$$S \text{ minimal } \Longleftrightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \text{ linear unabhängig}$$

3.2.24 Hilfssatz

Vor.:

$$\begin{aligned} V &\text{ Vektorraum} \\ \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\} &\text{ Basis von } V \\ \vec{x} &\in V \end{aligned}$$

Beh.:
Es gibt eindeutig bestimmte relle Zahlen $r_1, r_2, \cdots, r_n$ mit der Eigenschaft
$\vec{x} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \cdots + r_n\vec{a}_n$.

3.2.25 Kronecker Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$$

3.2.26 Kanonische Basis

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{i1} \\ \delta_{i2} \\ \delta_{i3} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ist die „kanonische Basis“ von R^3.

3.2.27 Satz (Koordinaten bez. einer orthogonalen Basis)

Vor.:

$$\begin{aligned} V &\text{ euklidischer Vektorraum} \\ \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\} &\text{ orthogonale Basis von } V (=: B) \\ \vec{x} &\in V \\ \vec{x} \text{ hat bez. } B \text{ die Koordinaten } &r_1, r_2, \cdots, r_n \end{aligned}$$

Beh.:

$$\bigwedge_{j \in \{1,2,3,\cdots,n\}} \qquad r_j = \frac{\vec{x} * \vec{a}_j}{\vec{a}_j * \vec{a}_j}$$

3.2.28 Orthonormierung

Geg:

$$\begin{aligned} V \text{ euklidischer Vektorraum} \\ n \in N \\ \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\} \text{ Basis von } V \end{aligned}$$

Ges.:

$$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n \in V, \text{ wobei} \begin{cases} \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\} \\ \quad \text{orthonormierte Basis von } V \\ \vec{b}_1 \in \langle \vec{a}_1 \rangle \\ \vec{b}_2 \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle \\ \cdots \\ \vec{b}_n \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \rangle \end{cases}$$

Verfahren:

$$\vec{b}'_i = \vec{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{a}_i * \vec{b}_j) \cdot \vec{b}_j$$

$$\text{Normierung: } \vec{b}_i = \frac{1}{||\vec{b}'_i||} \cdot \vec{b}'_i$$

Kapitel 4

Mathematik 13/1

4.1 Klausur Nr. 1

4.1.1 Approximationssatz

Vor.:

$$\begin{aligned} V &\text{ euklidischer Vektorraum} \\ U &\text{ Vektorunterraum zu } V \\ U &\text{ hat ein endliches Erzeugendensystem} \\ \vec{q} &\in V \end{aligned}$$

Beh.:

1. $$\bigvee_{\vec{x}\in U} \bigwedge_{\vec{y}\in U} \left(\vec{x} \neq \vec{y} \Rightarrow ||\vec{x}-\vec{q}|| < ||\vec{y}-\vec{q}||\right)$$
2. Ist $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$ eine orthonormierte Basis von U, so ist $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{b}_i * \vec{q}) \cdot \vec{b}_i$

Beweis: [Wichtig]

4.1.2 Satz

Vor.:

$$\begin{aligned} V &\text{ euklidischer Vektorraum} \\ U &\text{ Vektorunterraum von } V \text{ mit ONB } \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\} \\ \vec{q} &\in V \\ \vec{x} &\text{ optimale, } \vec{q} \text{ approximierende Vektor aus } U \end{aligned}$$

Beh.:

$$\bigvee_{\vec{y}\in U} \vec{y} * (\vec{x} - \vec{q}) = 0$$

(Alle Vektoren $\vec{y} \in U$ sind orthogonal zu $(\vec{x} - \vec{q})$)

4.1.3 Lineare Regression

Finde eine Gerade g, wobei

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - (mx_i + b))^2$$

minimal ist.

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - (mx_i + b))^2 = ||\vec{y} - (m\vec{x} + b\vec{e})||^2 \quad \text{wobei}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sind.}$$

Einordnung in das allgemeine Approximationsproblem: Zu approximieren wäre der Vektor $\vec{y} \in R^n$ aus $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle \quad (\subseteq R^n)$ heraus.
Berechnung:

1. Orthonormieren von $\{\vec{x}, \vec{e}\}$
2. Approximieren

Ergebnis:

$$m = \frac{\vec{x} * \vec{x} - n\bar{x}\bar{y}}{\vec{x} * \vec{x} - n\bar{x}\bar{x}}, \quad b = \bar{y} - m\bar{x}$$

4.1.4 Orthogonales Komplement

Vor.:

$$\begin{aligned} V &\text{ euklidischer Vektorraum} \\ U &\text{ Vektorunterraum von } V \\ \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\} &\text{ ONB von } U \\ U^{\perp} = \{\vec{x} \in V | \bigwedge_{\vec{y} \in U} &\quad \vec{x} * \vec{y} = 0\} \end{aligned}$$

Beh.:

1. $U^\perp$ Vektorunterraum von V

2. $\bigwedge_{\vec{x}\in V} \quad \dot{\bigvee}_{\vec{c}\in U, \vec{d}\in U^\perp} \qquad \vec{c}+\vec{d}=\vec{x}$

4.1.5 Definition: Orthogonales Komplement (allgemein)

Vor.:

$$\begin{aligned} &V \text{ euklidischer Vektorraum} \\ &M \subseteq V \end{aligned}$$

Def.:

$$M^\perp := \{\vec{x}\in V | \bigwedge_{\vec{y}\in M} \vec{x} * \vec{y} = 0\}$$

4.1.6 Definition: „linear“

Vor.:

$$\begin{aligned} &V, W \text{ Vektorräume} \\ &\varphi : V \to W \end{aligned}$$

Def.:

$$\varphi \text{ „linear“ } :\Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi \text{ homogen,} \\ \quad \text{d.h. } \bigwedge_{\vec{a}\in V}\bigwedge_{r\in R} \quad \varphi(r\cdot\vec{a}) = r\cdot\varphi(\vec{a}) \\ \varphi \text{ additiv,} \\ \quad \text{d.h. } \bigwedge_{\vec{a},\vec{b}\in V} \quad \varphi(\vec{a}+\vec{b}) = \varphi(\vec{a})+\varphi(\vec{b}) \end{cases}$$

4.1.7 Definition: „Bild (φ)“

$\text{Bild}(\varphi) := \{\varphi(\vec{a}) | \vec{a}\in V\}$

4.1.8 Hilfssätze

Vor.:

$$\varphi : V \to W, \text{ linear}$$

Beh.:

1. $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

2. $\bigwedge_{\vec{a}\in V} \varphi(-\vec{a}) = -\varphi(\vec{a})$

3. Bild(φ) ist Vektorunterraum von W

4. Kern(φ) ist Vektorunterraum von V

Beweise: [Wichtig]

4.1.9 Definition: „Kern (φ)“

$\text{Kern}(\varphi) := \{\vec{x}\in V | \varphi(\vec{x}) = \vec{0}_W\}$

4.1.10 Hilfssatz: Injektivität einer linearen Abbildung

Vor.:

$$\begin{aligned} V, W &\text{ Vektorräume} \\ \varphi : V \to W, &\text{ linear} \\ \operatorname{Kern}(\varphi) = \{\vec{0}_V\} \end{aligned}$$

Beh.:

$$\varphi \text{ injektiv (d.h. } \bigwedge_{\vec{a},\vec{b} \in V} \quad (\varphi(\vec{a}) = \varphi(\vec{b}) \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{b})$$

Beweis: [Können]

4.1.11 Der spezielle Austauschsatz

Vor.:

$$\begin{aligned} V &\text{ Vektorraum} \\ \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\} &\text{ Basis von } V \\ \vec{b} \in V^* &\quad (V \text{ ohne } \vec{0}) \end{aligned}$$

Beh.:

$$\bigvee_{i \in \{1,2,3,\cdots,n\}} \quad \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \vec{a}_{i+2}, \cdots, \vec{a}_n\} \text{ Basis von } V$$

Beweis: [Wichtig]

4.1.12 Der allgemeine Austauschsatz

Vor.:

$$\begin{aligned} V &\text{ Vektorraum} \\ \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\} &\text{ Basis von } V \\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_m \in V, &\text{ lin. unabhängig} \end{aligned}$$

Beh.: Nach geeigneter Umnumerierung der $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ gilt

1. $m \leq n$
2. $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_m, \vec{a}_{m+1} \cdots, \vec{a}_n\}$ Basis von V

Beweis: [durch Induktion als Sonderaufgabe]

Folgerung:

Vor.:

$$\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \cdots, \vec{c}_n\}, \{\vec{d}_1, \vec{d}_2, \cdots, \vec{d}_m\} \text{ Basen von } V$$

Beh.: $m = n$
$\Rightarrow$ Alle Basen eines Vektorraums bestehen aus gleichvielen Vektoren. Diese Anzahl heißt *„Dimension des Vektorraums“*

4.2 Klausur Nr. 2

4.2.1 Definition: „Rang“, „Defekt“

- $\dim(\operatorname{Bild}(\varphi)) =: \operatorname{rg}(\varphi)$ („Rang der Abbildung φ“)
- $\dim(\operatorname{Kern}(\varphi)) =: \operatorname{def}(\varphi)$ („Defekt der Abbildung φ“)

4.2.2 Dimensionssatz

Vor.:

$$\begin{aligned} V, W &\text{ Vektorräume} \\ \dim(V) &= n \\ n &\leq \infty \\ \varphi : V \to W, &\text{ linear} \end{aligned}$$

Beh.:
$\dim(V) = \dim(\text{Bild}(\varphi)) + \dim(\text{Kern}(\varphi))$
oder
$\dim(V) = \text{ rg}(\varphi) + \text{ def}(\varphi)$
Beweis: [Wichtig]

4.2.3 Variation des Dimensionssatz

Vor.:

$$\begin{aligned} V, W &\text{ Vektorräume} \\ \varphi : V \to W, &\text{ linear} \\ n &\in N \\ \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\} &\text{ Basis von } V \end{aligned}$$

Beh.: $n = \text{ rg}(\varphi) + \text{ def}(\varphi)$
Beweis: [siehe Dimensionssatz]

4.2.4 Definition: „injektiv“, „surjektiv“

- φ „injektiv“ $:\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{\vec{a},\vec{b} \in V} \quad (\varphi(\vec{a}) = \varphi(\vec{b}) \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{b})$
- φ „surjektiv“ $:\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{\vec{y} \in W} \ \bigvee_{\vec{x} \in V} \quad \varphi(\vec{x}) = \vec{y} \quad (\text{Bild}(\varphi) = W)$

4.2.5 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Vor.:

$$\begin{aligned} V, W &\text{ Vektorräume} \\ n &\in N \\ \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\} &\text{ Basis von } V \\ \vec{c}_1, \vec{c}_2, \cdots, \vec{c}_n &\in W \end{aligned}$$

Beh.: Es gibt genau 1 lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, bei der für $i = 1, 2, \cdots, n$ gilt $\varphi(\vec{a}_i) = \vec{c}_i$
Beweis: [Wichtig]

4.2.6 Definition: „Matrix einer Abbildung“

Vor.:

$$\varphi : R^n \to R^m, \text{ linear}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \leftarrow \text{i. Stelle}$$

Def:

Das Schema $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ heißt „Matrix der Abbildung φ“.

4.2.7 Definition: „Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl“

Vor.:

$$r \in R$$

M_φ ist die Matrix der Abbildung φ

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

4.2.8 Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Vor.:

$\varphi(\vec{x}) = M_\varphi \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n} \\ \vdots \\ x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \cdots + x_na_m \end{pmatrix}$$

Herleitung: [können, einfach]

4.2.9 Sätze über lineare Abbildungen

(1)

Vor.:

$\varphi, \chi : V \to W$, linear

Beh.:

1. $\varphi + \chi$ linear
2. $M_{\varphi+\chi} = \cdots$ (falls $V = R^n, W = R^m$)

(2)

Vor.:

$$\varphi : V \to W, \text{ linear}$$
$$r \in R$$

Beh.:

1. $r \cdot \varphi$ linear
2. $M_{r\cdot\varphi} = \cdots$ (falls $V = R^n, W = R^m$)

(3)

Vor.:

$$\varphi : V \to W, \text{ linear}$$
$$\chi : W \to U, \text{ linear}$$

Beh.:

1. $\chi \circ \varphi$ linear
2. $M_{\chi\circ\varphi} = \cdots$ (falls $U = R^k, V = R^n, W = R^m$)

(4)

Vor.:

$$\varphi : V \to W, \text{ linear, bijektiv}$$

Beh.:

1. Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : W \to V$ ist auch linear
2. $M_{\varphi^{-1}} = \cdots$ (falls $V = R^n, W = R^m$)

Beweise: [können]
(Bildet $(L(V,W), +, s\cdot)$ einen Vektorraum ?
Mit $(L(V,W) := \{\varphi | \varphi : V \to W \text{ , linear } \}))$

4.2.10 Wie erhält man aus den Matrizen von φ, χ die Matrix von $\chi \circ \varphi$?

Vor.:

$$i, j, k, m, n \in N$$

$$M_\chi = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix}, \quad M_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

$$M_{\chi\circ\varphi} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Beh.:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ c_{ji} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } c_j = \begin{pmatrix} a_{1i}b_{11} + a_{2i}b_{12} + \cdots + a_{ki}b_{1k} \\ \vdots \\ a_{1i}b_{j1} + a_{2i}b_{j2} + \cdots + a_{ki}b_{jk} \\ \vdots \\ a_{1i}b_{m1} + a_{2i}b_{m2} + \cdots + a_{ki}b_{mk} \end{pmatrix}$$

Kapitel 5

Mathematik 13/2

5.1 Klausur Nr. 1

5.1.1 Eigenschaften einer Metrik

$||M$ Menge

δ „Metrik auf M“, wenn

1. $\bigwedge_{x,y \in M} \quad \delta(x,y) \in R$
2. $\bigwedge_{x,y \in M} \quad \delta(x,y) \geq 0; = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $\bigwedge_{x,y \in M} \quad \delta(x,y) = \delta(y,x)$
4. $\bigwedge_{x,y,z \in M} \quad \delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$ „Dreiecksungleichung“

Wenn in M die Abstandsfunktion δ mit 1), 2), 3), 4) gegeben ist, heißt (M, δ) „metrischer Raum“.

5.1.2 Grenzwert

Vor.:

$$\begin{aligned} M_1, M_2 \text{ metrische Räume} \\ A \subseteq M_1 \\ f : A \to M_2 \\ a \in A' \\ \lambda \in M_2 \end{aligned}$$

Defs.:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lambda \Longleftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon \in R_+} \bigvee_{\mu \in R_+} \bigwedge_{x \in A \setminus \{a\}} \quad (\delta(x,a) < \mu \Longrightarrow \delta(f(x), \lambda) < \varepsilon)$$

speziell, wenn M_1, M_2 normierte Vektorräume sind:

$$\bigwedge_{\varepsilon \in R_+} \bigvee_{\mu \in R_+} \bigwedge_{x \in A} \quad (0 < ||x - a|| < \mu \Longrightarrow ||f(x) - \lambda|| < \varepsilon)$$

speziell, wenn $M_1, M_2 = R^1$:

$$\bigwedge_{\varepsilon \in R_+} \bigvee_{\mu \in R_+} \bigwedge_{x \in A} \quad (x \in]a - \mu, a + \mu[\setminus \{a\} \Longrightarrow f(x) \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$$

5.1.3 Differenzierbarkeit

Vor.:

$$\begin{aligned} A = [a, b] &\subseteq R \\ M \text{ normierter Vektorraum} \\ f : A &\to M \\ c &\in A^\circ \end{aligned}$$

Man bildet die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi_c : A\backslash\{c\} &\to M \\ x \mapsto \frac{1}{x-c}&(f(x) - f(c)). \end{aligned}$$

Def.:
Wenn φ_c bei c einen Grenzwert hat, bezeichnet man diesen als Ableitung von f an der Stelle c. ($f^{'}(c)$)

5.1.4 Ableitungsregeln für Abbildungen

Vor.:

$$\begin{aligned} A &\subseteq R \\ \varphi : A \to R; k \in R; \vec{d} &\in V \\ f, g : A \to V; V \text{ normierter Vektorraum} \\ a &\in A^\circ \\ f, g, \varphi \text{ bei a differenzierbar} \end{aligned}$$

Beh.:

1. $\varphi \cdot \vec{d}$ bei a diffb.; $(\varphi \cdot \vec{s})'(a) = \varphi'(a) \cdot \vec{d}$
2. $k \cdot f$ bei a diffb.; $(k \cdot f)'(a) = k \cdot f'(a)$
3. $f + g$ bei a diffb.; $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
4. $\varphi \cdot f$ bei a diffb.; $(\varphi \cdot f)'(a) = \varphi(a) \cdot f'(a) + \varphi'(a) \cdot f(a)$
5. Falls V ein euklidischer Vektorraum ist:
   (a) $f * g$ diffb. bei a
   (b) $(f * g)'(a) = f'(a) * g(a) + f(a) * g'(a)$

5.1.5 Stetige Ergänzung

Vor.:

$$\begin{aligned} f : A &\to R \\ c &\in A'\backslash A \end{aligned}$$

Beh.:
Genau dann läßt sich f so auf $A \cup \{c\}$ ausdehnen, dass f bei c stetig ist, wenn f bei c einen Grenzwert hat ($\in R$).
In diesem Fall setzt man

$$f(c) := \lim_{x \to c} f(x)$$

Kapitel 6

Anhang 1 (Aufgabenstellungen der Klausuren)

6.1 Klausur 11.2.1

6.1.1 Aufgabe 1

In den ganzen Zahlen wird eine Verknpfung $\circ$ auf folgende Weise erklärt: $a \circ b := a + b - 37$.

1. Beweise, daß für die Verknüpfung $\circ$ das Kommutativgesetz gilt.
2. Zeige, daß es bezüglich der Verknüpfung $\circ$ ein neutrales Element gibt.
3. Gib (mit Nachweis der Richtigkeit) das zu 4711 inverse Element an.

6.1.2 Aufgabe 2

1. Erkläre, unter welchen Voraussetzungen die Aussage *f hat bei c den Grenzwert* λ sinnvoll ist, und welcher Sachverhalt damit gemeint ist.
2. Es sei f die auf [-4; 4] definierte Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2 - x; c = 0; \varepsilon = 0,1$. Gib ein (gemäß der Grenzwertdefinition) geeignetes δ an und zeige, daß es den Anforderungen aus der Definition genügt.
3. Beweise unmittelbar mit Hilfe der Grenzwertdefinition den folgenden Satz: Wenn f an der Stelle c den Grenzwert 0 hat, W_g Teilmenge von [-1111; 1991] ist, dann hat auch $f \cdot g$ an der Stelle c den Grenzwert 0.

6.1.3 Aufgabe 3

1. Erkläre, wann eine Funktion f an einer Stelle c *differenzierbar* heißt, und erläutere Ansatz und geometrische Bedeutung der Ableitung.
2. Zeige (unter unmittelbarer Verwendung der Definition), daß die auf [1; 9] durch $f(x) = \sqrt{4x} - 7$ definierte Funktion an der Stelle 4 differenzierbar ist, und bestimme so $f'(4)$.
3. Formuliere und beweise die Summenregel der Differentialrechnung.
4. Bestimme (mit Hilfe der Ableitungsregeln) für $f(x) = \frac{5x}{2x^2+4}$ die Werte $f'(0)$ und $f'(22)$.

6.1.4 Aufgabe 4

Der lokale Wachstumssatz besagt bekanntlich folgendes: Wenn eine auf einer Menge A reeller Zahlen definierte Funktion f an einem inneren Punkt c von A differenzierbar ist und dort eine positive Ableitung hat, dann gibt es eine positive Zahl δ, für die folgendes gilt:
$]c-\delta; c+\delta[$ ist eine Teilmenge von A, und für jedes x aus $]c-\delta; c[$ und jedes z aus $]c; c+\delta[$ gilt $f(x) < f(c) < f(z)$.
Formuliere die Aussage des Positivitätssatzes und beweise damit den lokalen Wachstumssatz.

6.1.5 Aufgabe 5

Beim Turmbau zu Babel wurde zunächst das Erdgeschoß mit einer Höhe von 6m errichtet. Jedes weitere Stockwerk wurde dann 0,98 mal so hoch gemauert wie das vorhergehende (, also das erste 5,88m hoch usw.). Nach der Errichtung des 111. Stockwerks wurde die Bautätigkeit durch die berühmte Sprachverwirrung gestoppt. Welche Höhe hatte der Turm zu diesem Zeitpunkt?

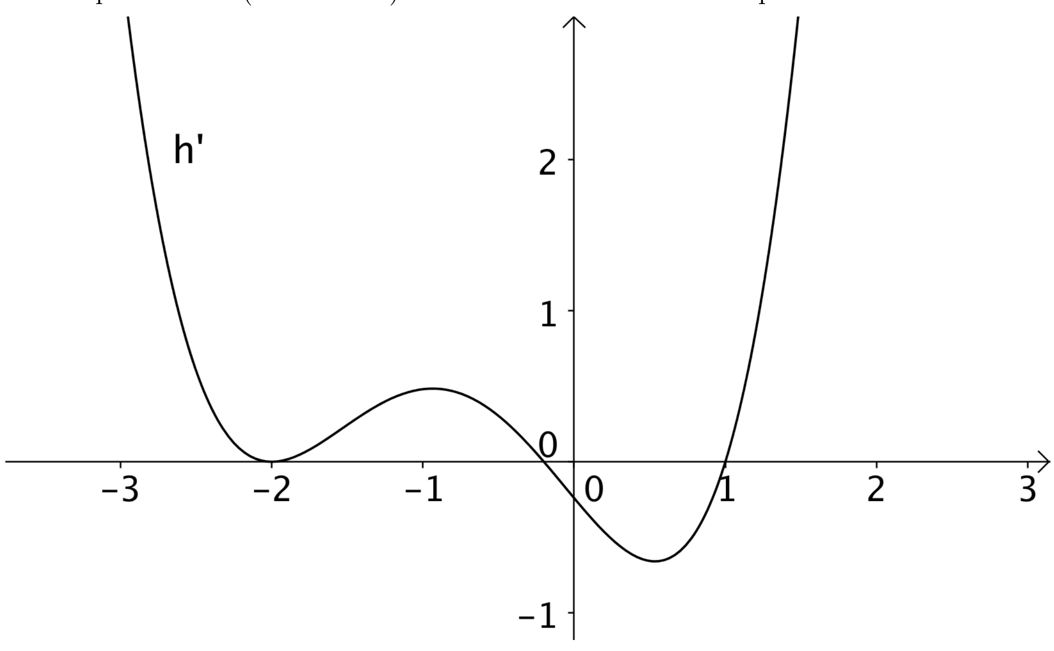
6.1.6 Aufgabe 6

In der Menge R hat gemäß Vollständigkeitsaxiom jede nicht-leere, nach oben beschränkte Menge M eine kleinste obere Schranke (=: sup M). Bestimme (mit Nachweis) sup(]1; 34[) und sup({ 1; 5; 2; 7; 3 }) .

6.2 Klausur 11.2.2

6.2.1 Aufgabe 1

1. Auf dem Intervall [-3; 3] ist durch die Gleichung $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)^4$ eine Funktion f gegeben. Bestimme alle Extrempunkte des Graphen. (Eine Skizze wird nicht verlangt).
2. Eine ganzrationale Funktion g dritten Grades hat bekanntlich einen Funktionsterm der Form
   $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (a \neq 0)$.
   Entscheide (mit Nachweis), ob der Graph einer solchen Funktion stets einen Wendepunkt hat.
3. Von der Funktion h sei bekannt, daß ihre Nullstellen bei -2 und 1 liegen. Außerdem kennt man den Verlauf des Graphen von h' (siehe Skizze). Skizziere den Verlauf des Graphen von h.



6.2.2 Aufgabe 2

Von einer auf ganz R definierten Funktion f sei lediglich bekannt, daß für alle reellen Zahlen x, y die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ erfüllt ist.

1. Weise nach, daß $f(0) = 0$ oder $f(0) = 1$ gelten muß.
2. Zusätzlich sei nun bekannt, daß $f(1)$ den Wert 2 hat. Zeige damit, daß $f(0) \neq 0$ gilt.
3. Berechne $f(8)$ und $f(-3)$.
4. Weiter sei jetzt noch vorausgesetzt, daß f an der Stelle 0 differenzierbar ist und dort die Ableitung w hat. Beweise, dass f dann an jeder Stelle differenzierbar ist und für jedes $x \in R$ gilt: $f'(x) = w \cdot f(x)$.

6.2.3 Aufgabe 3

Gegeben sei auf R die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2+2} - 2$.

1. Bestimme $f'(x)$ und zeige, daß f genau eine Nullstelle hat; gib diese mit einem Fehler ≤ 1 an.
2. Berechne die Nullstelle von f .
3. Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß f weniger als 2 Fixpunkte hat.
4. Weise nach, daß f mindestens einen (und wegen des vorhergehenden Aufgabenteils somit genau einen) Fixpunkt hat.
5. Gib an, was man unter einer Umgebung von ∞ versteht, und zeige damit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

6.3 Klausur 12.1.1

6.3.1 Aufgabe 1

1. Von einer geometrischen Folge $\langle a_n \rangle$ ist bekannt: $a_2 = 2$ und $a_5 = 16$. Bestimme a_8 und a_9.
2. Beweise, daß eine geometrische Folge $\langle c_n \rangle$ mit $c_1 > 0$ und $q > 1$ nach oben nicht beschränkt ist.

   Hinweis: Verwende die Bernoullische Ungleichung.
3. Für die Folge $\langle b_n \rangle$ gelte $b_1 = \frac{1}{3}$ und für alle $n \in N : b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n\cdot(n+2)}$.

   Bestimme (mit Nachweis) das allgemeine Folgenglied b_n.

6.3.2 Aufgabe 2

1. Erkläre, wann eine Folge $\langle a_n \rangle$ als *Nullfolge* bezeichnet wird, und weise hiermit die durch $a_n = \frac{3}{2n-5}$ gegebene Folge als Nullfolge nach.
2. Untersuche die Folgen $\langle \cos(\frac{1}{n}) \rangle, \langle \cos(n \cdot \pi) \rangle$ und $\langle \frac{\cos(n)}{n} \rangle$ auf Konvergenz.
3. f sei eine ganzrationale Funktion vom Grade 5, g sei eine ganzrationale Funktion vom Grade 6. Für alle Glieder einer Folge $\langle d_n \rangle$ gelte die Gleichung $d_n \cdot g(n) = f(n)$.

   Weise nach, daß $\langle d_n \rangle$ eine Nullfolge ist.

   Wenn der allgemeine Beweis nicht gelingt, darf als Teilersatz auch ein spezielles Beispiel gewählt werden.
4. Für alle Glieder einer Folge $\langle w_n \rangle$ gelte $w_{n+1} = \sqrt{2w_n - 1}$. Ferner sei bekannt, dass das erste Folgenglied den Wert 13 hat.

   Bestimme w_2 und w_3, zeige, daß die Folge $\langle w_n \rangle$ konvergent ist und bestimme ihren Grenzwert ω.

6.3.3 Aufgabe 3

Auf dem Intervall $I = [1; 4]$ ist durch die Gleichung $f(x) = \frac{1}{x}$ eine Funktion gegeben (- die bekannte Kehrwertfunktion).

1. Z_n sei die Zerlegung des Intervalls I in n Teilintervalle gleicher Länge.

   Erkläre, was man unter der *Untersumme* $U(f, Z_n)$ versteht, und berechne $U(f, Z_6)$.
2. Bestimme eine natürliche Zahl n, für die $O(f, Z_n) - U(f, Z_n) < 0,01$ gilt.
3. Erkläre, wann eine Funktion g *integrierbar* heißt und was man - falls g integrierbar ist - unter dem *Integral von* g versteht.

   Zeige damit, daß f integrierbar ist.
4. Die Funktion h, definiert auf dem Intervall [1; 3], ist fast konstant: Sie hat an allen Stellen außer bei 2 den Wert 2; $h(2) = 0$.

   Weise nach, daß h integrierbar ist, und berechne $\int h$.

6.4 Klausur 12.1.2

6.4.1 Aufgabe 1

1. Erkläre, was man unter einer *Riemannschen Summe* versteht, und zeige, daß die Folge der Riemannschen Summen $R(f, Z_n^*)$ gegen das Integral von f strebt, wenn f integrierbar ist und die Folge $\langle\delta(Z_n^*)\rangle$ (Feinheit von Z_n^*) gegen 0 strebt.

2. Gegeben ist die Folge $\langle a_n\rangle$ mit $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$.

   Berechne a_1, a_2 und a_3. Zeige, daß a_n eine Riemannsche Summe der Funktion f ist; dabei ist $f(x) = \frac{1}{1+x}$, definiert auf dem Intervall [0; 1]. Bestimme damit den Grenzwert der Folge $\langle a_n\rangle$.

3. Stelle die Funktion ln als Integralfunktion dar; zeige hiermit - unter Verwendung des Mittelwertsatzes -, daß $\ln(2)$ zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt.

6.4.2 Aufgabe 2

Auf dem Intervall [-3; 1] ist durch die Gleichung $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$ eine Funktion f gegeben.

1. Bestimme durch Berechnung einer Riemannschen Summe (Länge der Teilintervalle sei 1) einen Näherungswert für das Integral von f.

2. Berechne das Integral von f; erläutere hierbei das Verfahren der partiellen Integration.

3. Bestimme den Mittelwert von f sowie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse berandet wird.

4. Eine Folge $\langle s_n\rangle$ wird durch die Vorschrift $s_n = \int_0^1 t^n \cdot e^t \; dt$ definiert.

   Bestimme s_1, s_2, s_3; zeige hierzu zunächst, daß die Folge $\langle s_n\rangle$ die Rekursionsbedingung $s_{n+1} = e-(n+1)\cdot s_n$ erfüllt.

6.4.3 Aufgabe 3

1. Beweise den folgenden *Transformationssatz* mit Hilfe der Substitutionsregel:

   Es sei f eine stetige reellwertige Funktion auf [a; b]; c und $k (k \neq 0)$ sind reelle Zahlen. Weiterhin sei $\alpha = \frac{a-c}{k}$ und $\beta = \frac{b-c}{k}$.

   Dann gilt: $\int_a^b f(z)dz = k \cdot \int_\alpha^\beta f(k \cdot t + c)dt$

2. Berechne die folgenden Integrale: (1) $\int_0^\pi \sin(2t+3)dt$, (2) $\int_0^2 x \cdot \sqrt{x^2+5} \; dx$, (3) $\int_1^e \ln(t)dt$.

3. Beweise als Folgerung aus dem Positivitätssatz:
   Ist die reellwertige Funktion f stetig auf [a; b] und gilt $f(x) \geq 0$ für alle x aus [a; b], so hat das Integral von f genau dann den Wert 0, wenn die Funktion f konstant mit dem Wert 0 ist.

4. Berechne $\int_{-4}^4 |x| \; dx$.

6.5 Klausur 12.2.1

6.5.1 Aufgabe 1

Auf der Menge $R \setminus \{2\}$ ist die rationale Funktion f durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x-2}$ gegeben.

1. Führe eine Kurvendiskussion durch.

2. Bestimme die Gleichung der zu f asymptotischen ganzrationalen Funktion g.

   Für welche x-Werte unterscheiden sich $f(x)$ und $g(x)$ um weniger als $\frac{1}{3}$?

3. Skizziere die Graphen der Funktionen f und g.

4. Die y-Achse, die Parallele zur y-Achse durch den Punkt mit dem Koordinatenpaar (-6; 0) und die Graphen von f und g beranden gemeinsam ein Flächenstück. Berechne seinen Inhalt A.

5. Eine Kurve, die den Graphen von f an allen Stellen berührt, an denen dieser eine waagerechte Tangente hat, heißt *f-deckend*. Bestimme eine ganzrationale Funktion möglichst kleinen Grades, deren Graph f-deckend ist.

6.5.2 Aufgabe 2

Im Raum liegen die drei Punkte A(7; 12; -6), B(13; 24; 6), C(13; 18; 24).

1. Zeige, daß C nicht auf der Geraden durch A und B liegt, und bestimme im Dreieck ABC die Größen a und α.

2. Vom Schwerpunkt S des Dreiecks ABC wird das Lot auf die Seite BC gefällt. Bestimme die Koordinaten des Lotfußpunktes L.

3. Der Mittelpunkt der Strecke AB sei D, der Mittelpunkt der Strecke CD sei E. Die Gerade durch A und E schneidet die Seite BC in einem Punkt F.

   Ermittle die Koordinaten von D, E und F, und berechne damit das Teilungsverhältnis $\frac{BF}{BC}$.

4. Berechne allgemein (ohne Verwendung der konkret gegebenen Koordinaten und mit Hilfe linear unabhängiger Vektoren) das Teilungsverhältnis $\frac{BF}{BC}$.

6.5.3 Aufgabe 3

Im Vektorraum R^3 seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ gegeben.

1. Erkläre, was man unter einer *Linearkombination von* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ versteht, und wann genau man sagt, die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ seien *linear unabhängig*.

   Beweise dann: Wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ linear abhängig sind, aber $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind, läßt sich $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ darstellen.

2. Von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (alle drei $\neq \vec{o}$) sei vorausgesetzt, daß jeder zu den beiden anderen orthogonal ist.

   Erkläre, wann zwei Vektoren (zueinander) *orthogonal* heißen, und beweise, daß unter den gegebenen Voraussetzungen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind.

3. Für beliebige Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aus R^3 definiere man $\vec{x} * * \vec{y}$ durch die folgende Gleichung:

   $\vec{x} * * \vec{y} = 3x_1 \cdot y_1 + 5x_2 \cdot y_2 + 2x_3 \cdot y_3 - 2x_1 \cdot y_3 - 2x_3 \cdot y_1$; dabei sind x_1, x_2, x_3 die Komponenten von $\vec{x}$ und y_1, y_2, y_3 die Komponenten von $\vec{y}$.

   Es ist zu beweisen, daß durch diese Definition von ** ein Skalarprodukt definiert wird.

4. Im Raum sind acht Punkte hellrot, acht Punkte hellgrün, acht Punkte hellblau und acht Punkte hellviolett gefärbt. Zu jeder dieser Gruppen von acht Punkten wird der Schwerpunkt bestimmt und entsprechend (dunkelrot, dunkelgrün, dunkelblau oder dunkelviolett) gefärbt.

   Entscheide (mit Nachweis), ob die vier dunkel gefärbten Punkte nun den gleichen Schwerpunkt haben wie die zweiunddreißig hell gefärbten Punkte.

6.6 Klausur 12.2.2

6.6.1 Aufgabe 1

1. Beweise, daß für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$ stets die folgenden Formeln gelten:

$$(a) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} * \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} * \vec{c})\vec{a} \qquad (b) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{b} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a} * \vec{a} & \vec{a} * \vec{b} \\ \vec{a} * \vec{b} & \vec{a} * \vec{a} \end{vmatrix}$$

2. Für welche (beiden) Werte von s hat das folgende lineare Gleichungssystem nicht genau eine Lösung?

$$\begin{aligned} x + sy + z &= 10 \\ x + 2y + 4z &= 3 \\ x + y + sz &= 1 \end{aligned}$$

3. Löse mit Hilfe der Cramerschen Regel das im vorhergehenden Aufgabenteil angegebene Gleichungssystem für den Fall $s = 4$.

6.6.2 Aufgabe 2

Im Raum schwebt ein Tetraeder T mit den Ecken $A(1; 0; 1), B(2; 1; 1), C(-1; 2; 9)$ und $D(2; -1; 6)$.

1. Bestimme die Länge l und den Fußpunkt F des Lotes von D auf die Ebene durch A, B und C.
2. E sei die Ebene mit der Gleichung $x - y - 2z - 15 = 0$.

   Weise nach, daß diese Ebene keinen Punkt mit dem Tetraeder T gemeinsam hat.
3. Zeige, daß der Punkt $L(0; 8; 11)$ auf der gleichen Seite von E liegt wie T, und daß sein Abstand zu E größer ist als der Abstand eines jeden Punktes von T zu E.
4. Eine im Punkte L befestigte Lichtquelle erzeugt in der Ebene E einen Schatten von T.

   Berechne die Koordinaten des Bildpunkts C' und beschreibe einen Weg zur Überprüfung, ob C' auf dem Rande der Schattenfläche liegt.

6.6.3 Aufgabe 3

E sei die Ebene durch drei (nicht kollineare) Punkte A, B, C - dabei ist zunächst (für diesen Aufgabenteil) weder die Ebene E noch sind die Punkte A, B, C speziell gewählt.

1. F sei die Menge aller Raumpunkte X, deren Ortsvektor eine Darstellung der Form $\vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ mit $r + s + t = 1$ zuläßt.

   Welcher Zusammenhang besteht zwischen E und F ? (Nachweis!)
2. Nun werden A und B wie in Aufgabe 2 gewählt; P sei der Punkt mit dem Koordinatentripel (-1; -5; 1). E_0 sei die Ebene durch A, B und den Ursprung O.

   Bestimme die Schnittmenge der beiden Ebenen E und E_0.
3. Die drei Koordinatenachsen schneiden E in Punkten X_0, Y_0 und Z_0.

   Berechne die Koordinaten dieser Punkte sowie den Flächeninhalt von Dreieck $X_0Y_0Z_0$.
4. Bestimme die Größe α des Winkels zwischen den Ebenen E und E_0.

6.7 Klausur 13.1.1

6.7.1 Aufgabe 1

In P_3 wird durch die Definition $f * g = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ bekanntlich ein Skalarprodukt erklärt. U sei der von p_2, p_1, p_0 aufgespannte Unterraum.
Bezeichnungserläuterung (nachträglich für spätere Leser eingefügt): P_3 ist der Vektorraum der ganzrationalen Funktionen vom Grade ≤ 3; p_i ist die Potenzfunktion i-ten Grades ($p_1(x) = x^i$ für i = 0, 1, 2, 3).

1. Bestimme eine ONB von U durch Orthonormieren von $\{p_2, p_1, p_0\}$ in dieser Reihenfolge. (Zur Kontrolle: Man erhält $b_3 = 10p_2 - 12p_1 + 3p_0$).
2. Man erklärt eine Abbildung φ von P_3 in U, indem man jedem Vektor p aus P_3 als Bild $\varphi(p)$ den p aus U heraus optimal approximierenden Vektor zuordnet. Weise nach, daß die Abbildung φ linear und nicht injektiv ist, und bestimme Bild(φ).

3. Erkläre allgemein, was man unter $U^\perp$ versteht, und weise nach, daß der Vektor $p - \varphi(p)$ für jedes p aus P_3 in $U^\perp$ liegt.

4. Berechne den Vektor $\varphi(p_3)$; überprüfe anhand dieses speziellen Ergebnisses die Orthogonalitätsaussage aus dem vorhergehenden Aufgabenteil.

6.7.2 Aufgabe 2

Die Punkte A, B und S sind durch ihre unten angegebenen Koordinaten gegeben; g sei die Gerade durch A und O (Ursprung); E sei die Ebene durch A, B und O. A = (-2; 2; -6), B=(1; -3; 2), S=(-11;14;12).

1. Zeige, daß die Punkte A, B und O nicht kollinear sind, und bestimme Parameterdarstellungen von g und E .

2. L_1 sei der Fußpunkt des Lotes von S auf g. Wähle die Voraussetzungen des Approximationssatzes so speziell, daß sich als optimal approximierender Vektor $\vec{l_1}$(der Ortsvektor von L_1) ergibt. Bestimme L_1 durch Anwendung des Approximationssatzes.

3. L_2 sei der Fußpunkt des Lotes von S auf E. Wähle die Voraussetzungen des Approximationssatzes so speziell, daß sich als optimal approximierender Vektor $\vec{l_2}$ (der Ortsvektor von L_2) ergibt. Bestimme L_2 durch Anwendung des Approximationssatzes.

4. Die Durchführung der Teilaufgaben 2. und 3. ergibt, dass L_1 und L_2 verschieden sind. Bestimme die Menge aller Punkte X, die anstelle von S in den vorhergehenden Aufgabenteilen verwendet zu Ergebnissen führen, bei denen L_1 und L_2 gleich sind.

6.7.3 Aufgabe 3

1. Bestimme irgendeine orthonormierte Basis B= $\{\vec{b_1}; \vec{b_2}; \vec{b_3}\}$ von R^3, wobei $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}$ ist.

2. Nun definiert man eine Abbildung φ von R^3 in R^3, indem man jedem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ den Bildvektor $x\vec{b_1} + y\vec{b_2} + z\vec{b_3}$ zuordnet. Zeige, daß die Abbildung φ linear ist.

3. Weise nach, daß die Abbildung φ sogar isometrisch (längentreu) ist, das heißt, daß für jeden Vektor aus R^3 der Bildvektor die gleiche Norm wie der Urbildvektor hat.

6.7.4 Aufgabe 4

Im (x,y)-Koordinatensystem sind n Punkte $(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_n; y_n)$ gegeben. Es wird eine Parabel höchstens zweiter Ordnung gesucht, die durch den Ursprung verläuft und die Punkte in folgendem Sinne möglichst gut approximiert: Ist $p(x)$ der Funktionsterm der Parabel, so soll der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n}(p(x_i) - y_i)^2$ möglichst klein sein.
Spezialisiere die Voraussetzungen für den Approximationssatz so, daß sich damit eine Lösung dieses Problems ergibt, und skizziere den Lösungsweg.

6.8 Klausur 13.1.2

6.8.1 Aufgabe 1

Zu den reellen Zahlen c, p, q, r, s bildet man in R^3 folgende vier Vektoren

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_3} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

und in R^4 die vier Vektoren

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, \quad \vec{d_2} = \begin{pmatrix} q \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ r \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{d_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Für welche Werte von c gibt es genau eine lineare Abbildung φ von R^3 nach R^4 mit
   - $\varphi(\vec{a_1}) = \vec{d_1}, \quad \varphi(\vec{a_2}) = \vec{d_2}$ und $\varphi(\vec{a_3}) = \vec{d_3}$
2. Man wählt nun speziell für c den Wert $c = 3$. Zeige, daß es dann eindeutig bestimmte reelle Zahlen p, q, r, s und genau eine lineare Abbildung φ von R^3 nach R^4 gibt mit
   - $\varphi(\vec{a_1}) = \vec{d_1}, \quad \varphi(\vec{a_2}) = \vec{d_2}, \quad \varphi(\vec{a_3}) = \vec{d_3} \quad \varphi(\vec{a_4}) = \vec{d_4}$

   Bestimme diese Werte p, q, r, s.

   Für die weiteren Teile dieser Aufgabe sei nun φ die lineare Abbildung von R^3 nach R^4 mit der Matrix

$$M_\varphi = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 20 & -32 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Begründe, warum eine lineare Abbildung von R^3 nach R^4 nie surjektiv sein kann, und gib speziell einen Vektor aus R^4 an, der nicht zu Bild(φ) gehört.
4. Beweise, daß die Abbildung φ injektiv ist.

6.8.2 Aufgabe 2

Es sei φ eine lineare Abbildung eines Vektorraums V in einen Vektorraum W, $\vec{d}$ sei ein Vektor aus W.

1. Mit L wird die Menge aller Urbilder von $\vec{d}$ bezeichnet, also $L = \{\vec{x} \in V | \varphi(x) = \vec{d}\}$. Wenn $\vec{d}$ speziell der Nullvektor in W ist, ist L bekanntlich ein Vektorraum - nämlich der Kern K von φ . Es sei weiterhin vorausgesetzt, daß der Vektor $\vec{a}$ zu L gehört. Beweise, daß genau dann ein Vektor $\vec{x} \in V$ zu L gehört, wenn $\vec{x} - \vec{a}$ in K liegt.
2. Weise für die folgenden Abbildungen φ_1 und φ_2 nach, daß sie linear sind, und bestimme jeweils die Matrix und den Kern der Abbildung sowie die Menge L für den jeweils angegebenen Vektor $\vec{d}$; $\vec{b}$ ist dabei der Vektor aus R^3 mit den Komponenten 1, -1 und 2.

$$\varphi_1(\vec{x}) = \vec{b} * \vec{x}, \quad \vec{d} = (2); \qquad \varphi_2(\vec{x}) = \vec{b} \times \vec{x}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.8.3 Aufgabe 3

Eine lineare Abbildung φ eines euklidischen Vektorraums V in sich heißt *symmetrisch*, wenn für alle $\vec{a}, \vec{b}$ aus V die Gleichung $\varphi(\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * \varphi(\vec{b})$ erfüllt ist.

1. Für eine symmetrische lineare Abbildung φ sei $\vec{a}$ aus Kern(φ), $\vec{b}$ aus Bild(φ). Zeige, daß die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ orthogonal sind.
2. Speziell sei $V = R^3$. Jede lineare Abbildung φ von V in sich kann dann durch eine Matrix A mit Komponenten a_{ij} beschrieben werden. Von diesen Komponenten sei bekannt, daß für alle Indexpaare (i,j) die Gleichung $a_{ij} = a_{ji}$ erfüllt ist. Weise nach, daß φ symmetrisch ist.

3. Noch spezieller sei φ nun durch die folgende Matrix A gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Bestimme Kern und Bild von φ.

   Bestätige für die Ergebnisse die Aussage von Aufgabenteil 1.

4. Wenn für eine beliebige symmetrische lineare Abbildung φ eines euklidischen Vektorraums V in sich für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ die beiden Gleichungen $\varphi(\vec{a}) = 2\vec{a}$ und $\varphi(\vec{b}) = 3\vec{b}$ gelten, so sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal. Das ist zu beweisen.

6.9 Klausur 13.2.1 - unter Abiturbedingungen

6.9.1 Aufgabe 1

Durch die Gleichung $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ ist eine rationale Funktion gegeben.

1. Führe eine Kurvendiskussion durch und skizziere die Kurve.

2. Bestimme das Schmiegepolynom s_2 zu f.

   Kontrolle: $s_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}x^2$

3. Beweise, daß s_2 über dem Intervall [0; 1] an keiner Stelle einen größeren Wert als f annimmt.

4. Man benutzt nun s_2 über [0; 1] als Näherungsfunktion zu f. Weise nach, daß der Fehler überall kleiner als $\frac{1}{5}$ ist.

5. Berechne den mittleren absoluten Fehler.

6.9.2 Aufgabe 2

Der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Differentialrechnung lautet:
Sind f und g stetige Funktionen auf einem Intervall [a; b] , differenzierbar im Inneren des Intervalls, und ist $g'(x)$ für alle $x \in$]a; b[positiv, so gibt es eine Stelle $\xi \in$]a; b[, so daß gilt: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

1. Ein Schüler „beweist“ den Satz so: Nach dem Mittelwertsatz (angewendet auf die Funktion f) gibt es ein $\xi \in$]a; b[mit $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$; entsprechend liefert die Anwendung des Satzes auf die Funktion g: $g(b) - g(a) = g'(\xi) \cdot (b - a)$. Zusammenfassen der beiden Gleichungen liefert die Behauptung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Erläutere, inwiefern dieser Beweis fehlerhaft ist.

2. Beweise den verallgemeinerten Mittelwertsatz unter Benutzung der auf [a; b] definierten Hilfsfunktion h mit

$$h(x) := f(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g(x) \cdot (f(b) - f(a)) + f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b) \ .$$

   Hinweis: Verwende den Satz von Rolle.

3. Für über [-1; 1] differenzierbare Funktionen f, g sei bekannt: $f(0) = g(0) = 0$. Der Grenzwert von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ für x gegen 0 existiere und betrage λ.

   Beweise (unter Verwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes), daß dann bei 0 auch der Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ existiert und den Wert λ hat.

4. Berechne $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

6.9.3 Aufgabe 3

Eine lineare Abbildung φ eines normierten Vektorraums V in sich heißt *kontrahierend*, wenn es eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$ gibt, für welche gilt:
Für alle $\vec{a}, \vec{b}$ aus V ist $\|\varphi(\vec{a}) - \varphi(\vec{b})\| \leq q \cdot \|\vec{a} - \vec{b}\|$.

1. Erkläre die Bedeutung von φ *ist stetig bei* $\vec{a}$ und von $\vec{a}$ *ist Fixpunkt von* φ, und weise nach, dass jede kontrahierende Abbildung φ stetig ist und höchstens einen Fixpunkt hat.

2. φ sei eine kontrahierende Abbildung von V in sich mit dem Fixpunkt $\vec{c}$.

   Durch die rekursive Definition $\vec{d_1} := \vec{o}$, und $\vec{d}_{n+1} := \varphi(\vec{d_n})$ für alle $n \in N$ wird eine Folge $\langle \vec{d_n} \rangle$ erklärt. Beweise, daß diese Folge gegen $\vec{c}$ konvergiert.

   Hinweis: Zeige zunächst, daß für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung $\|\vec{d_n} - \vec{c}\| \leq q^{n-1} \cdot \|\vec{c}\|$ erfüllt ist.

   Für die folgenden Aufgabenteile sei speziell $V = R^3$. Durch die Gleichung

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

   wird eine Abbildung von V in sich erklärt.

3. Weise nach, daß die Abbildung φ kontrahierend ist.

4. Bestimme - gemäß der Definition im zweiten Aufgabenteil - die Vektoren $\vec{d_2}$ und $\vec{d_3}$.

5. Berechne den Fixpunkt von φ durch Aufstellen und Lösen eines der Fixpunktdefinition entsprechenden Gleichungssystems.

6.10 Abiturklausur

6.10.1 Aufgabe 1

Die rationale Funktion f hat die Gleichung $f(x) = 4 \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x+2}$.

1. Gib die umfassendste Argumentmenge A an, ermittle Nullstellen, Monotonieeigenschaften und Asymptoten, und skizziere den Verlauf des Graphen von f.

2. Bestimme den Funktionsterm $p(x)$ der Parabel dritter Ordnung, die den Graphen von f in seinen Nullpunkten berührt.

3. Weise nach, daß im Intervall zwischen den Nullpunkten des Graphen von f die Parabel an keiner Stelle oberhalb von Graph(f) verläuft.

4. Berechne den Inhalt des von den beiden Kurven umrandeten Flächenstücks.

6.10.2 Aufgabe 2

Gegeben sind die vier Punkte A(1; -1; 0), B(2; 3; 1), C(5; 10; 3) und D(4; 4; -4).

1. Zeige, daß die Punkte A, B und C eine Ebene E festlegen, und berechne den Flächeninhalt von Dreieck ABC.

2. Gib eine Parameterdarstellung von E an, ermittle hiermit eine Koordinatengleichung für E und zeige durch Lösen der entsprechenden Gleichung mit drei Variablen, wie man aus der Gleichung wieder eine Parameterdarstellung gewinnen kann.

3. Ermittle den Abstand des Punktes D von der Ebene E sowie das Volumen des Tetraeders ABCD.

4. S sei der Schwerpunkt des Tetraeders, T entstehe durch Spiegelung von D an S. Bestimme die Koordinaten von S und T, bestätige, daß D und T in verschiedenen Halbräumen von E liegen und berechne die Koordinaten des Schnittpunktes P von DT mit E.

6.10.3 Aufgabe 3

Für die reelle Zahl a sei φ_a die lineare Abbildung von R^3 in sich, die durch die folgende (3,3)-Matrix M_φ gegeben ist:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 2a \end{pmatrix}$$

1. Bestimme - mit geeigneten Fallunterscheidungen - den Kern von φ_a.
2. Gib für jeden der auftretenden Fälle eine Basis des Bildraums an.
3. Bestimme alle Werte $a \in R$, für welche der folgende Vektor $\vec{d}$ im Bildraum liegt:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

4. Formuliere die Gleichung $\varphi_a(\vec{x}) = \vec{d}$ als lineares Gleichungssystem, deute die drei auftretenden Gleichungen als Koordinatengleichungen von drei Ebenen und charakterisiere deren Lage zueinander in Abhängigkeit von a.

Kapitel 7

Anhang 2 (Lösungsbeispiele zu den Aufgaben der Klausuren)

7.1 Klausur 11.2.1

7.1.1 Aufgabe 1

In den ganzen Zahlen wird eine Verknpfung $\circ$ auf folgende Weise erklärt: $a \circ b := a + b - 37$.

1. Beweise, dass für die Verknüpfung $\circ$ das Kommutativgesetz gilt.

   Lösung: Zu zeigen ist, dass für alle ganzen Zahlen a und b gilt : $a \circ b = b \circ a$. Dies ergibt sich durch Anwendung des für die Addition gültigen Kommutativgesetzes:

   $$a \circ b = a + b - 37 = b + a - 37 = b \circ a \ .$$

2. Zeige, dass es bezüglich der Verknüpfung $\circ$ ein neutrales Element gibt.

   Lösung: Nachzuweisen ist die Existenz einer ganzen Zahl n mit der Eigenschaft, dass für jede ganze Zahl a gilt : $a \circ n = a$. Aus den folgenden Äquilanzumformungen ergibt sich, dass $n = 37$ neutrales Element ist:

   $$a \circ n = a \iff a + n - 37 = a \iff n - 37 = 0 \iff n = 37 \ .$$

3. Gib (mit Nachweis der Richtigkeit) das zu 4711 inverse Element an.

   Lösung: Inverses Element zu 4711 ist -4637, denn $4711 \circ (-4637) = 4711 - 4637 - 37 = 37 = n$.

7.1.2 Aufgabe 2

1. Erkläre, unter welchen Voraussetzungen die Aussage f *hat bei* c *den Grenzwert* λ sinnvoll ist, und welcher Sachverhalt damit gemeint ist.

   Lösung: Vorausgesetzt wird, dass die reelle Zahl c Häufungspunkt der Argumentmenge A von f ist und dass λ eine reelle Zahl ist. Die Grenzwertaussage bedeutet dann, dass es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ gibt, so dass für alle x aus $A \cap]c - \delta, c + \delta[\setminus \{c\}$ gilt: $f(x) \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$.

2. Es sei f die auf [-4; 4] definierte Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2 - x; c = 0; \varepsilon = 0,1$. Gib ein (gemäß der Grenzwertdefinition) geeignetes δ an und zeige, dass es den Anforderungen aus der Definition genügt.

   Lösung: f hat bei $c = 0$ den Grenzwert $\lambda = 0$. Wählt man z.B. $\delta = 0,02$, so gilt für alle x mit $|x - 0| < \delta$:

   $$|f(x) - 0| = |x^2 - x| = |x - 1| \cdot |x| \leq 4 \cdot |x| < 4 \cdot 0,02 = 0,08 < 0,1 \ .$$

3. Beweise unmittelbar mit Hilfe der Grenzwertdefinition den folgenden Satz: Wenn f an der Stelle c den Grenzwert 0 hat, W_g Teilmenge von [-1111; 1991] ist, dann hat auch $f \cdot g$ an der Stelle c den Grenzwert 0.

   Lösung: Zu einer vorgegebenen positiven Zahl ε ist eine passende positive Zahl δ anzugeben, so dass für alle Stellen x aus der gemeinsamen Argumentmenge von f und g mit $|x| < \delta$ gilt $|(f \cdot g)(x)| < \varepsilon$.

Da f bei c einen Grenzwert (nämlich 0) hat, gibt es zur vorgegebenen positiven Zahl $\frac{\varepsilon}{2000}$ ein geeignetes δ im Sinne der Grenzwertdefinition. Für jedes x mit Betrag kleiner als δ gilt daher:

$$|(f\cdot g)(x)-0| = |f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| \le |f(x)|\cdot 1999 < \tfrac{\varepsilon}{2000}\cdot 1999 < \varepsilon\ .$$

7.1.3 Aufgabe 3

1. Erkläre, wann eine Funktion f an einer Stelle c *differenzierbar* heißt, und erläutere Ansatz und geometrische Bedeutung der Ableitung.

   Lösung: Wenn c Häufungspunkt und Element der Argumentmenge A von f ist, betrachtet man auf der Menge $A\setminus\{c\}$ die durch $g(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ definierte Funktion g. Dann heißt f differenzierbar an der Stelle c, wenn g bei c einen Grenzwert hat. Dieser Grenzwert wird als *Ableitung* von f an der Stelle c bezeichnet, abgekürzt $f'(c)$.

2. Zeige (unter unmittelbarer Verwendung der Definition), dass die auf $[1;9]$ durch $f(x)=\sqrt{4x}-7$ definierte Funktion an der Stelle 4 differenzierbar ist, und bestimme so $f'(4)$.

   Lösung:

   $$\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{\sqrt{4x}-7-(-3)}{x-4} = \frac{\sqrt{4x}-4}{x-4} = 2\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = 2\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = 2\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = 2\frac{1}{\sqrt{x}+2} \to \frac{1}{2} \quad (x\to 4)$$

   Ergebnis: $f'(4)=\frac{1}{2}$.

3. Formuliere und beweise die Summenregel der Differentialrechnung.

   Lösung: Summenregel: Wenn die Funktionen f und g beide an der Stelle c differenzierbar sind, dann ist auch $f+g$ bei c differenzierbar und hat die Ableitung $f'(c)+g'(c)$.

   Beweis: $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(c)}{x-c} = \frac{f(x)+g(x)-f(c)-g(c)}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \frac{g(x)-g(c)}{x-c} \to f'(c)+g'(c) \quad (x\to c)$.

4. Bestimme (mit Hilfe der Ableitungsregeln) für $f(x)=\frac{5x}{2x^2+4}$ die Werte $f'(0)$ und $f'(22)$.

   Lösung: Mit der Quotientenregel ergibt sich:

   $f'(x) = \frac{(2x^2+4)\cdot 5-5x\cdot 4x}{(2x^2+4)^2} = \frac{20-10x^2}{(2x^2+4)^2}$. Durch Einsetzen erhält man:

   $f'(0)=\frac{10\cdot 2}{16}=\frac{5}{4}$ $\qquad f'(22)=\frac{10(2-22^2)}{(2\cdot 22^2+4)^2} = -0,0051...$

7.1.4 Aufgabe 4

Der lokale Wachstumssatz besagt bekanntlich folgendes: Wenn eine auf einer Menge A reeller Zahlen definierte Funktion f an einem inneren Punkt c von A differenzierbar ist und dort eine positive Ableitung hat, dann gibt es eine positive Zahl δ, für die folgendes gilt:
$]c-\delta;\,c+\delta[$ ist eine Teilmenge von A, und für jedes x aus $]c-\delta;\,c[$ und jedes z aus $]c;\,c+\delta[$ gilt $f(x)<f(c)<f(z)$.
Formuliere die Aussage des Positivitätssatzes und beweise damit den lokalen Wachstumssatz.
Lösung: Der Positivitätssatz besagt: Wenn eine Funktion g an einer Stelle c einen positiven Grenzwert hat, dann gibt es eine positive Zahl δ mit der Eigenschaft, dass an allen Stellen x aus $]c-\delta;\,c+\delta[$, die im Definitionsbereich von g liegen, die Funktion positive Werte annimmt. Angewendet auf die Funktion g mit $g(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ liefert dies, dass $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ in einer δ-Umgebung von c positiv ist. Da c innerer Punkt des Definitionsbereichs ist, darf man - ggf. nach Verkleinerung von δ - voraussetzen, dass $]c-\delta;\,c+\delta[$ ganz im Definitionsbereich von f liegt. In diesem Bereich haben also nach dem Positivitätssatz Zähler und Nenner von $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ gleiches Vorzeichen, so dass folgt:

$$x\in\,]c-\delta;\,c[\;\Rightarrow x-c<0 \Rightarrow f(x)-f(c)<0 \Rightarrow f(x)<f(c).$$

Analog ergibt sich, dass für z aus $]c;\,c+\delta[$ gilt $f(c)<f(z)$.

7.1.5 Aufgabe 5

Beim Turmbau zu Babel wurde zunächst das Erdgeschoss mit einer Höhe von 6m errichtet. Jedes weitere Stockwerk wurde dann 0,98 mal so hoch gemauert wie das vorhergehende (, also das erste 5,88m hoch usw.). Nach der Errichtung des 111. Stockwerks wurde die Bautätigkeit durch die berühmte Sprachverwirrung gestoppt. Welche Höhe hatte der Turm zu diesem Zeitpunkt?
Lösung: Bezeichnet man die Höhe bis zur Decke des n-ten Stockwerks mit $h(n)$, so hat man (ohne Einheit):

$h(n) = 6 + 6 \cdot 0,98 + 6 \cdot 0,98^2 + ... + 6 \cdot 0,98^n = 6 \cdot \sum_{i=0}^{n} 0,98^i = 6 \cdot \frac{1-0,98^{n+1}}{1-0,98} = 300 \cdot (1 - 0,98^{n+1})$

Somit ist $h(111) = 300 \cdot (1 - 0,98^{112}) = 268,779...$ Der Turm hatte eine Höhe von ca. 269 m .

7.1.6 Aufgabe 6

In der Menge R der reellen Zahlen hat gemäß Vollständigkeitsaxiom jede nicht-leere, nach oben beschränkte Menge M eine kleinste obere Schranke (=: sup M).
Bestimme (mit Nachweis) sup(]1; 34[) und sup({ 1; 5; 2; 7; 3 }) .
Lösung: Die endliche Menge { 1; 5; 2; 7; 3 } hat das Maximum 7, also ist sup({ 1; 5; 2; 7; 3 }) = 7.
Eine obere Schranke von]1; 34[ist 34. Für jedes positive ε (o.B.d.A. $\varepsilon < 30$) ist 34 - ε keine obere Schranke, da die größere Zahl 34 - $\frac{\varepsilon}{2}$ in]1; 34[liegt. Also ist sup]1; 34[= 34.

7.2 Klausur 11.2.2

7.2.1 Aufgabe 1

1. Auf dem Intervall [-3; 3] ist durch die Gleichung $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)^4$ eine Funktion f gegeben. Bestimme alle Extrempunkte des Graphen. (Eine Skizze wird nicht verlangt).

   Lösung: Als Ableitung erhält man $f'(x) = (x+1)^2 \cdot 4(x-1)^3 + 2(x+1)(x-1)^4 = 2(x+1)(x-1)^3(3x+1)$. An der Faktorzerlegung liest man $\{-1; -\frac{1}{3}; 1\}$ als Nullstellenmenge von f' ab. Da f' an allen drei Nullstellen das Vorzeichen wechselt, wie an den ungeraden Exponenten in der Faktorzerlegung erkennen kann, liege dort Extrempunkte vor. Ebenso liegen an den Rändern des Definitionsbereichs Extrempunkte vor, da dort die Ableitung verschieden von 0 ist.

   Wegen $f(-3) = 1024, f(-1) = 0, f(-\frac{1}{3}) = \frac{1024}{729}, f(1) = 0, f(3) = 256$ hat der Graph von f die folgenden Extrempunkte:

   $A(-3; 1024), B(-1; 0), C(-\frac{1}{3}; \frac{1024}{729}), D(1; 0)$ und $E(3; 256)$.

2. Eine ganzrationale Funktion g dritten Grades hat bekanntlich einen Funktionsterm der Form

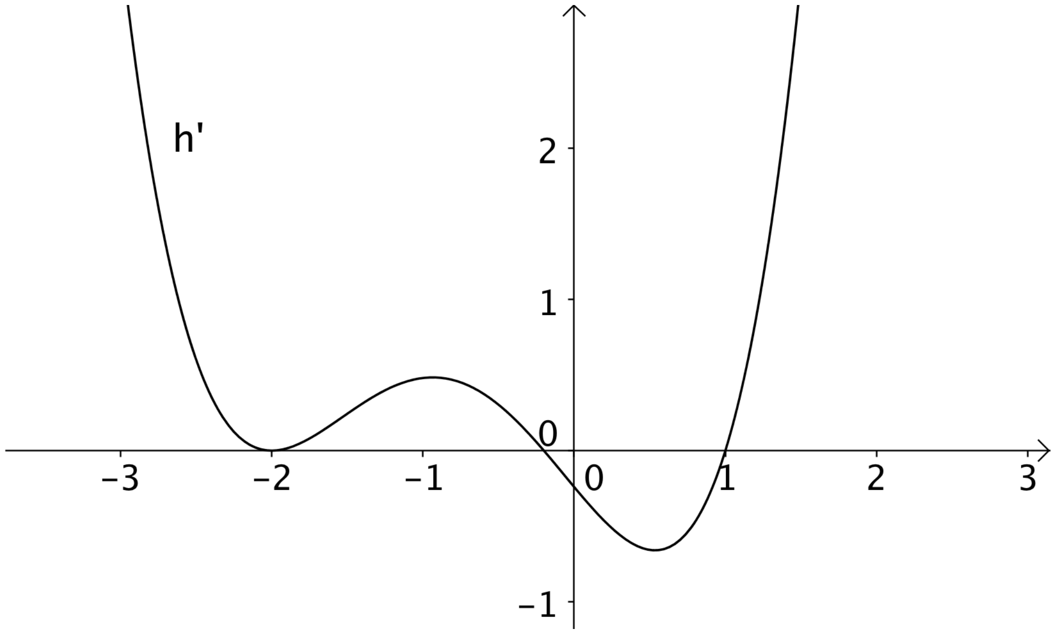
   $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (a \neq 0).$

   Entscheide (mit Nachweis), ob der Graph einer solchen Funktion stets einen Wendepunkt hat.

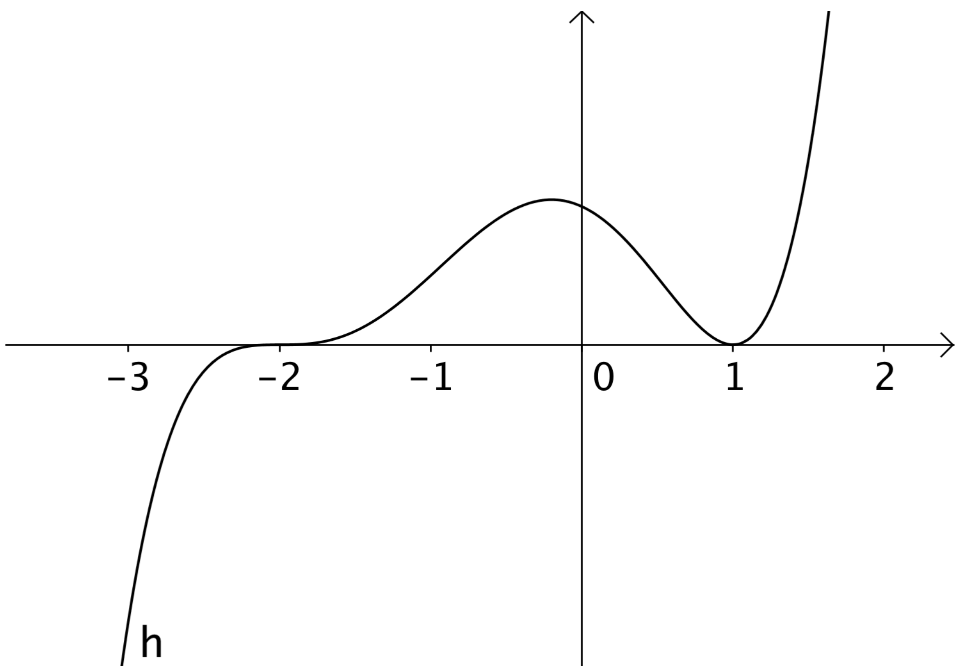
   Lösung: Zweimaliges Ableiten von f ergibt:

   $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b;$ f'' ist also eine lineare Funktion mit Steigung $6a \neq 0$ und hat mithin eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel. Der Graph einer solchen Funktion hat somit stets einen Wendepunkt.

3. Von der Funktion h sei bekannt, dass ihre Nullstellen bei -2 und 1 liegen. Außerdem kennt man den Verlauf des Graphen von h' (siehe Skizze). Skizziere den Verlauf des Graphen von h.



Lösung:



7.2.2 Aufgabe 2

Von einer auf ganz R definierten Funktion f sei lediglich bekannt, dass für alle reellen Zahlen x, y die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ erfüllt ist.

1. Weise nach, dass $f(0) = 0$ oder $f(0) = 1$ gelten muß.

   Lösung: $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$, also $f(0) \cdot (1 - f(0)) = 0$; somit ist $f(0) = 0$ oder $f(0) = 1$.

2. Zusätzlich sei nun bekannt, dass $f(1)$ den Wert 2 hat. Zeige damit, dass $f(0) \neq 0$ gilt.

   Lösung: $2 = f(1) = f(1+0) = f(1) \cdot f(0) = 2 \cdot f(0)$, also $f(0) = 1$.

3. Berechne $f(8)$ und $f(-3)$.

   Lösung: $f(8) = f(4+4) = (f(4))^2 = (f(2+2))^2 = (f(2) \cdot f(2))^2 = (f(2))^4 = f(1)^8 = 2^8 = 256$;

$1 = f(0) = f(3-3) = f(3)\cdot f(-3) = (f(1))^3\cdot f(-3) = 2^3\cdot f(-3)$, also $f(-3) = \frac{1}{8}$.

4. Weiter sei jetzt noch vorausgesetzt, dass f an der Stelle 0 differenzierbar ist und dort die Ableitung w hat. Beweise, dass f dann an jeder Stelle differenzierbar ist und für jedes $x \in R$ gilt: $f'(x) = w\cdot f(x)$.

   Lösung: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x)\cdot f(h)-f(x)}{h} = \frac{f(h)-1}{h}\cdot f(x) = \frac{f(h)-f(0)}{h-0}\cdot f(x) \to w\cdot f(x) \quad (h\to 0)$.

7.2.3 Aufgabe 3

Gegeben sei auf R die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x\cdot\sqrt{x^2+2}-2$.

1. Bestimme $f'(x)$ und zeige, dass f genau eine Nullstelle hat; gib diese mit einem Fehler ≤ 1 an.

   Lösung: $f'(x) = \sqrt{x^2+2} + x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{x^2+2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$

   Da f' überall positiv ist, ist die Funktion f streng isoton, kann also höchstens eine Nullstelle haben. Wegen $f(1) = \sqrt{3}-2 < 0$ und $f(2) = 2\cdot\sqrt{6}-2 = \sqrt{24}-2 > 0$ liegt eine (also die einzige) Nullstelle in Intervall $]1;2[$; ein geeigneter Näherungswert für die Nullstelle ist also z.B. 1,5 .

2. Berechne die Nullstelle von f .

   Lösung: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\cdot\sqrt{x^2+2} = 2$.

   Durch Quadrieren, Ordnen und Lösen der entstehenden biquadratischen Gleichung erhält man:

   $x^4+2x^2-4=0$, also $x^2=\sqrt{5}-1$ und somit $x=\sqrt{\sqrt{5}-1}$.

   Dabei wurde beachtet, dass es genau eine Nullstelle gibt und diese zwischen 1 und 2 liegt. Die gesuchte Nullstelle ist $\sqrt{\sqrt{5}-1}$, also 1,1117 ... .

3. Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass f weniger als 2 Fixpunkte hat.

   Lösung: Gäbe es zwei Fixpunkte d und e, müsste es eine Stelle c geben, an der die Ableitung von f den Wert $\frac{f(d)-f(e)}{d-e} = \frac{d-e}{d-e} = 1$ hat.

   Aber aus $f'(c) = 1$ folgt durch Quadrieren beider Seiten $\frac{4x^4+8x^2+4}{x^2+2} = 1$, also $4x^4+7x^2+2=0$, was wegen $4x^4+7x^2+2\geq 2$ nicht möglich ist.

4. Weise nach, dass f mindestens einen (und wegen des vorhergehenden Aufgabenteils somit genau einen) Fixpunkt hat.

   Lösung: Es wird gezeigt, dass die durch $h(x) = f(x)-x$ definierte stetige Funktion h einen Vorzeichenwechsel und somit - als stetige Funktion - eine Nullstelle hat.

   $h(1) = \sqrt{3}-2-1<0; \quad h(2) = 2\cdot\sqrt{6}-2-2 = \sqrt{24}-4>0;$

   es gibt also eine Stelle c mit $h(c) = 0$ und somit $f(c) = c$.

5. Gib an, was man unter einer Umgebung von ∞ versteht, und zeige damit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

   Lösung: Eine Menge U reeller Zahlen ist eine Umgebung von ∞, wenn es eine reelle Zahl s mit der Eigenschaft gibt, dass alle Zahlen, die größer als s sind, in U liegen.

   Zu zeigen ist, dass es zu jeder Zahl s eine Stelle x_0 gibt, so dass gilt: $x>x_0 \Rightarrow f(x)>s$. Hierzu braucht man lediglich $x_0 = s+2$ zu wählen, denn dann ist $f(x_0) = (s+2)\cdot\sqrt{(s+2)^2+2}-2 > (s+2)-2 = s$.

   Und da f streng isoton ist, gilt $f(x)>s$ auch für alle Stellen x mit $x>x_0$.

7.3 Klausur 12.1.1

7.3.1 Aufgabe 1

1. Von einer geometrischen Folge $\langle a_n\rangle$ ist bekannt: $a_2 = 2$ und $a_5 = 16$. Bestimme a_8 und a_9.

   Lösung: Das allgemeine Glied einer geometrischen Folge hat die Form $a_n = a\cdot q^n$. Durch Einsetzen von $n=2$ und $n=5$ erhält man $a\cdot q^2 = 2, \quad a\cdot q^5 = 16$, also durch Division $q^3 = 8$ und somit $q=2, a=\frac{1}{2}$.

   Daher ist $a_n = \frac{1}{2}\cdot 2^n = 2^{n-1}$ und speziell $a_8 = 2^7 = 128, \quad a_9 = 2^8 = 256$.

2. Beweise, dass eine geometrische Folge $\langle c_n \rangle$ mit $c_1 > 0$ und $q > 1$ nach oben nicht beschränkt ist.

   Hinweis: Verwende die Bernoullische Ungleichung.

   Lösung: Mit $d = q - 1 > 0$ ist $q = 1 + d$ und daher

   $$c_n = \tfrac{c_1}{q} \cdot (1+d)^n \geq \tfrac{c_1}{q} \cdot (1+nd) > \tfrac{c_1}{q} \cdot nd = \tfrac{d \cdot c_1}{q} \cdot n.$$

   Die Folge$\langle c_n \rangle$ lässt sich also nach unten durch ein Produkt aus einer positiven Konstanten und einer nach oben nicht beschränkten Folge abschätzen und ist mithin nach einem Majorantenkriterium nach oben nicht beschränkt.

3. Für die Folge $\langle b_n \rangle$ gelte $b_1 = \frac{1}{3}$ und für alle $n \in N : b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n \cdot (n+2)}$.

   Bestimme (mit Nachweis) das allgemeine Folgenglied b_n.

   Lösung: Wegen $b_{i+1} - b_i = \frac{1}{i \cdot (i+2)}$ kann man umformen:

   $$b_n - b_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i \cdot (i+2)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}) = \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i})$$
   $$b_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2} (\frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}) = \frac{3n^2 - n - 2}{4n(n+1)}$$

   Somit ist

   $$b_n = \frac{3n^2 - n - 2}{4n(n+1)} + \frac{1}{3} = \frac{13n^2 + n - 6}{12n(n+1)} \quad .$$

7.3.2 Aufgabe 2

1. Erkläre, wann eine Folge $\langle a_n \rangle$ als *Nullfolge* bezeichnet wird, und weise hiermit die durch $a_n = \frac{3}{2n-5}$ gegebene Folge als Nullfolge nach.

   Lösung: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ wird als Nullfolge bezeichnet, wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine Nummer n_0 mit der Eigenschaft gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n ab n_0 gilt: $|a_n| < \varepsilon$.

   Da die natürlichen Zahlen nach oben nicht beschränkt sind, gibt es eine natürliche Zahl n_0 über 2, die größer als $\frac{3+5\varepsilon}{2\varepsilon}$ ist. Für jede natürliche Zahl n, die größer als n_0 ist, gilt dann folgende Schlusskette:

   $$\frac{3+5\varepsilon}{2\varepsilon} < n \quad \Rightarrow \quad 3 + 5\varepsilon < 2n\varepsilon \quad \Rightarrow \quad 3 < 2n\varepsilon - 5\varepsilon \quad \Rightarrow \quad 3 < (2n-5)\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2n-5} < \varepsilon$$

   Da n nach Konstruktion nicht kleiner als 3 (also $2n-5$ positiv) ist, sind alle Umformungen der verwendeten Ungleichung erlaubt.

2. Untersuche die Folgen $\langle \cos(\frac{1}{n}) \rangle, \langle \cos(n \cdot \pi) \rangle$ und $\langle \frac{\cos(n)}{n} \rangle$ auf Konvergenz.

   Lösung:

   Da $\langle \frac{1}{n} \rangle$ eine Nullfolge und cos stetig bei 0 mit Funktionswert 1 ist, konvergiert die Folge $\langle \cos(\frac{1}{n}) \rangle$ gegen 1.

   Wegen $|\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi)| = 2$ strebt die Differenz der jeweils benachbarten Folgenglieder nicht gegen 0; somit ist eine notwendige Bedingung für Konvergenz nicht erfüllt.

   Als Produkt der betraglich durch 1 beschränkten Folge $\langle \cos(n) \rangle$ und der Nullfolge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ konvergiert die Folge $\langle \cos(n \cdot \pi) \rangle$ gegen 0.

3. f sei eine ganzrationale Funktion vom Grade 5, g sei eine ganzrationale Funktion vom Grade 6. Für alle Glieder einer Folge $\langle d_n \rangle$ gelte die Gleichung $d_n \cdot g(n) = f(n)$.

   Weise nach, dass $\langle d_n \rangle$ eine Nullfolge ist.

   Lösung: Aus dem Unterricht ist bekannt, dass eine ganzrationale Funktion g von mindestens erstem Grad für hinreichend große Argumentstellen keine Nullstellen mehr hat; für große Werte von n darf daher

$g(n) \neq 0$ vorausgesetzt werden. Ausgehend von $f(x) = \sum_{i=0}^{5} a_i x^i$ und $g(x) = \sum_{i=0}^{6} b_1 x^i$ (mit $b_6 \neq 0$) erhält man durch Kürzen mit n^6 für hinreichend großes n:

$$d_n = \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\frac{a_0}{n^6} + \frac{a_1}{n^5} + \frac{a_2}{n^4} + \frac{a_3}{n^3} + \frac{a_4}{n^2} + \frac{a_5}{n}}{\frac{b_0}{n^6} + \frac{b_1}{n^5} + \frac{b_2}{n^4} + \frac{b_3}{n^3} + \frac{b_4}{n^2} + \frac{b_5}{n} + b_6}$$

Nach der Summenregel für Grenzwerte streben alle Summanden außer b_6 in Zähler und Nenner gegen 0; nach der Quotientenregel für Nullfolgen ist $\langle d_n \rangle$ daher eine Nullfolge.

4. Für alle Glieder einer Folge $\langle w_n \rangle$ gelte $w_{n+1} = \sqrt{2w_n - 1}$. Ferner sei bekannt, dass das erste Folgenglied den Wert 13 hat.

   Bestimme w_2 und w_3, zeige, dass die Folge $\langle w_n \rangle$ konvergent ist und bestimme ihren Grenzwert s.

   Lösung: $w_2 = \sqrt{2w_1 - 1} = \sqrt{2 \cdot 13 - 1} = 5; \quad w_3 = \sqrt{2w_2 - 1} = \sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 3.$

   Die Folge $\langle w_n \rangle$ ist antiton, wie sich durch Induktion aus $w_2 = 5 < 13 = w_1$ und die folgende Schlusskette ergibt: $\quad w_{n+1} < w_n \quad \Rightarrow \quad w_{n+1} - 1 < w_n - 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{w_{n+1} - 1} < \sqrt{w_n - 1} \quad \Rightarrow \quad w_{n+2} < w_{n+1}.$

   Als antitone und nach unten (z.B. durch 0) beschränkte Folge hat $\langle w_n \rangle$ einen Grenzwert s; die Teilfolge $\langle w_{n+1} \rangle$ hat den gleichen Grenzwert, nach Summen- und Wurzelregel für konvergente Folgen hat sie andererseits den Grenzwert $\sqrt{2s - 1}$.

   Aus $s = \sqrt{2s - 1}$ ergibt sich durch Quadrieren und Ordnen die quadratische Gleichung $s^2 - 2s + 1 = 0$ mit dem gesuchten Grenzwert als Lösung: $s = 1$.

7.3.3 Aufgabe 3

Auf dem Intervall $I = [1; 4]$ ist durch die Gleichung $f(x) = \frac{1}{x}$ eine Funktion gegeben (- die bekannte Kehrwertfunktion).

1. Z_n sei die Zerlegung des Intervalls I in n Teilintervalle gleicher Länge.

   Erkläre, was man unter der *Untersumme* $U(f, Z_n)$ versteht, und berechne $U(f, Z_6)$.

   Lösung: Jedes Teilintervall der Zerlegung hat die Länge $\frac{4-1}{n}$. Bezeichnet man den i-ten Teilungspunkt des Intervalls I mit x_i, dann ist $x_i = 1 + i \cdot \frac{3}{n}$. Da f antiton ist, wird das Infimum jeweils am linken Ende des betrachteten Teilintervalls angenommen:

$$U(f, Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{1 + i \cdot \frac{3}{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n + 3i}$$

$$U(f, Z_6) = \sum_{i=1}^{6} \frac{3}{6 + 3i} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{2 + i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = 1,2178...$$

2. Bestimme eine natürliche Zahl n, für die $O(f, Z_n) - U(f, Z_n) < 0,01$ gilt.

   Lösung: Analog zur Bestimmung der Untersumme ergibt sich $O(f, Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3}{n+3i}$.

$$O(f, Z_n) - U(f, Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3}{n + 3i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n + 3i} = \frac{3}{n} - \frac{3}{4n} = \frac{9}{4n}$$

   Wählt man also z.B. $n = 250$, dann hat man $O(f, Z_{250}) - U(f, Z_{250}) = \frac{9}{1000} = 0,009 < 0,01$.

   Bemerkung: Für den letzten Aufgabenteil kann man auch kürzer die Formel für die Differenz zwischen Ober- und Untersumme einer antitonen Funktion f bei der Zerlegung von $[a; b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge verwenden: $O(f, Z_n) - U(f, Z_n) = \frac{(b-a) \cdot (f(a) - f(b))}{n}$.

3. Erkläre, wann eine Funktion g *integrierbar* heißt und was man - falls g integrierbar ist - unter dem *Integral von g* versteht.

   Zeige damit, dass f integrierbar ist.

Lösung: Die auf einem Intervall $[a;b]$ definierte Funktion g heißt integrierbar, wenn sie beschränkt ist und zu jedem positiven ε eine Zerlegung Z des Intervalls $[a;b]$ existiert, für die $O(g,Z) - U(g,Z) < \varepsilon$ gilt. Das Integral von g ist dann das Supremum von $U(g,Z)$ über der Menge aller Zerlegungen von $[a;b]$.

Da $\langle \frac{9}{4n} \rangle$ eine Nullfolge ist, kann man für jedes positive ε eine natürliche Zahl n angeben, für die $\frac{9}{4n}$ und somit auch $O(f,Z_n) - U(f,Z_n)$ kleiner als ε ist. f ist somit integrierbar.

4. Die Funktion h, definiert auf dem Intervall $[1;\ 3]$, ist fast konstant: Sie hat an allen Stellen außer bei 2 den Wert 2; $h(2) = 0$.

   Weise nach, dass h integrierbar ist, und berechne $\int h$.

   Lösung: Für die natürliche Zahl n betrachte man die Zerlegungspunkte $1; 2 - \frac{1}{n}; 2 + \frac{1}{n}; 3$.

   Für die zugehörige Zerlegung Z_n mit diesen Teilungspunkten ist dann $O(h,Z_n) = 4, U(h,Z_n) = 4 - \frac{2}{n} \cdot 2$. Somit ist $O(h,Z_n) - U(h,Z_n) = \frac{2}{n} \cdot 2$.

   Da $\langle \frac{4}{n} \rangle$ eine Nullfolge ist, folgt die Integrierbarkeit von h; $\quad \int h = 4$.

7.4 Klausur 12.1.2

7.4.1 Aufgabe 1

1. Erkläre, was man unter einer *Riemannschen Summe* versteht, und zeige, dass die Folge der Riemannschen Summen $R(f,Z_n^*)$ gegen das Integral von f strebt, wenn f integrierbar ist und die Folge $\langle \delta(Z_n^*) \rangle$ (Feinheit von Z_n^*) gegen 0 strebt.

   Lösung: Eine *Zerlegung mit Zwischenpunkten* Z^* eines Intervalls $[a;b]$ ist gegeben durch zwei endliche Folgen $\langle x_i \rangle, \langle \xi_i \rangle$ mit $a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le ...\xi_n \le x_n \le b$.

   Für die auf $[a;b]$ definierte Funktion f ist die zugehörige Riemannsche Summe

$$R(f,Z^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

   Wenn Z die zu Z^* gehörende Zerlegung ohne Zwischenpunkte ist, so gilt für $i = 1,2,3,...,n$ wegen

   $\inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}; x_i]\} \le f(\xi_i) \le \sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}; x_i]\}$ die Ungleichungskette

   $U(f,Z) \le R(f,Z^*) \le O(f,Z)$. Wenn die Zerlegungen nun eine Folge durchlaufen, deren Feinheit gegen 0 strebt, so konvergieren Unter- und Obersumme beide gegen das Integral von f, also nach dem Einschließungssatz für Folgen auch die Riemannschen Summen.

2. Gegeben ist die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$.

   Berechne a_1, a_2 und a_3. Zeige, dass a_n eine Riemannsche Summe der Funktion f ist; dabei ist $f(x) = \frac{1}{1+x}$, definiert auf dem Intervall $[0;\ 1]$. Bestimme damit den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$.

   Lösung: $a_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2}$; $\quad a_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2+i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$; $\quad a_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3+i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$.

   Für eine Zerlegung Z^* von $[0;1]$ in n Teilintervalle der Länge $\frac{1}{n}$ ergibt sich mit den Zwischenpunkten $\xi_i = \frac{i}{n}(i = 1,2,...,n)$ die Riemannsche Summe

$$R(f,Z^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\xi_i} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = a_n \quad .$$

   Die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert also gegen das Integral von f:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

3. Stelle die Funktion ln als Integralfunktion dar; zeige hiermit - unter Verwendung des Mittelwertsatzes -, dass ln(2) zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt.

   Lösung: $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$, also $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

   Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in [1;2]$ mit $\frac{1}{2-1}\int_1^2 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\xi}$.

   Da ξ zwischen 1 und 2 liegt, folgt $\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1$ und somit $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2-1}\int_1^2 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\xi} \in [\frac{1}{2};1]$.

7.4.2 Aufgabe 2

Auf dem Intervall [-3; 1] ist durch die Gleichung $f(x) = (x^2-1)\cdot e^x$ eine Funktion f gegeben.

1. Bestimme durch Berechnung einer Riemannschen Summe (Länge der Teilintervalle sei 1) einen Näherungswert für das Integral von f.

   Lösung: Wählt man als Zwischenpunkte der Zerlegung die rechten Enden der jeweiligen Teilintervalle, dann ist $R(f,Z^*) = f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1) = 3\exp(-2)+0+(-1)+0 = 3\exp(-2)-1 \approx -0,594$.

2. Berechne das Integral von f; erläutere hierbei das Verfahren der partiellen Integration.

   Lösung: Sind die Funktionen g und h auf $[a;b]$ stetig differenzierbar, so gilt nach der Regel über partielle Integration folgende Gleichung: $\int_a^b g'(t)\cdot h(t)\mathrm{d}t = [g(t)\cdot h(t)]_a^b - \int_a^b g(t)\cdot h'(t)\mathrm{d}t$.

   Mit $h(x) = x^2-1, g(x) = e^x, a = -3, b = 1$ und im zweiten Schritt $h(x) = 2x$ liefert das Verfahren der partiellen Integration:

$$\int_{-3}^{1}(t^2-1)\cdot e^t\mathrm{d}t = \left[(t^2-1)\cdot e^t\right]_{-3}^{1} - \int_{-3}^{1} 2t\cdot e^t\mathrm{d}t; \qquad \int_{-3}^{1} 2t\cdot e^t\mathrm{d}t = \left[2t\cdot e^t\right]_{-3}^{1} - \int_{-3}^{1} 2e^t\mathrm{d}t$$

$$\text{und somit} \int_{-3}^{1}(t^2-1)\cdot e^t\mathrm{d}t = \left[t^2-2t+1)\cdot e^t\right]_{-3}^{1} = \left[(t-1)^2\cdot e^t\right]_{-3}^{1} = -16\cdot e^{-3} \approx -0,797.$$

3. Bestimme den Mittelwert von f sowie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse berandet wird.

   Lösung: Der Mittelwert m einer auf $[a;b]$ definierten Funktion f errechnet sich als $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

$$m = \frac{1}{4}\int_{-3}^{1}(t^2-1)\cdot e^t\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[(t-1)^2\cdot e^t\right]_{-3}^{1} = -4\cdot e^{-3} \approx -0,199.$$

   Da die Exponentialfunktion überall positiv ist und der Ausdruck x^2-1 nur für $|x| < 1$ negativ ist, ergibt sich als gesuchter Flächeninhalt A:

$$A = \int_{-3}^{-1}(t^2-1)\cdot e^t\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1}(t^2-1)\cdot e^t\mathrm{d}t = \left[(t-1)^2\cdot e^t\right]_{-3}^{-1} - \left[(t-1)^2\cdot e^t\right]_{-1}^{1}$$

$$A = 4e^{-1} - 16e^{-3} + 4e^{-1} = 8e^{-1} - 16e^{-3} = 8e^{-3}\cdot(e^2-2) \approx 2,146.$$

4. Eine Folge $\langle s_n\rangle$ wird durch die Vorschrift $s_n = \int_0^1 t^n\cdot e^t\ \mathrm{d}t$ definiert.

   Bestimme s_1, s_2, s_3; zeige hierzu zunächst, dass die Folge $\langle s_n\rangle$ die Rekursionsbedingung $s_{n+1} = e-(n+1)\cdot s_n$ erfüllt.

   Lösung: Mit partieller Integration ergibt sich:

$$s_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}\cdot e^t\mathrm{d}t = \left[t^{n+1}\cdot e^t\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n\cdot e^t\mathrm{d}t = e-(n+1)\int_0^1 t^n\cdot e^t\mathrm{d}t = e-(n+1)\cdot s_n.$$

$$s_1 = \int_0^1 t\cdot e^t\mathrm{d}t = \left[t\cdot e^t\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^t\mathrm{d}t = e-(e-1) = 1.$$

   Mit der Rekursionsformel für s_n ergibt sich damit

   $s_2 = e-2s_1 = e-2$; $\qquad s_3 = e-3s_2 = e-3(e-2) = 6-2e$.

7.4.3 Aufgabe 3

1. Beweise den folgenden *Transformationssatz* mit Hilfe der Substitutionsregel:

   Es sei f eine stetige reellwertige Funktion auf $[a;b]$; c und $k(k \neq 0)$ sind reelle Zahlen. Weiterhin sei $\alpha = \frac{a-c}{k}$ und $\beta = \frac{b-c}{k}$.

   Dann gilt: $\int_a^b f(z)dz = k \cdot \int_\alpha^\beta f(k \cdot t + c)dt$

   Lösung: Die durch $\varphi(t) = k \cdot t + c$ definierte Funktion φ bildet wegen

   $$\varphi(\alpha) = k \cdot \frac{a-c}{k} + c = a, \quad \varphi(\beta) = k \cdot \frac{b-c}{k} + c = b \quad \text{und} \quad \varphi'(t) = k \neq 0$$

   das Intervall $[\alpha;\beta]$ monoton auf das Intervall $[a;b]$ ab. Nach der Substitutionsregel gilt daher

   $$\int_a^b f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(k \cdot t + c) \cdot k \ \mathrm{d}t = k \cdot \int_\alpha^\beta f(k \cdot t + c)\mathrm{d}t.$$

2. Berechne die folgenden Integrale: (1) $\int_0^\pi \sin(2t+3)dt$, (2) $\int_0^2 x \cdot \sqrt{x^2+5}\ dx$, (3) $\int_1^e \ln(t)dt$.

   Lösung: Bei (1) errät man $-\frac{1}{2}(\cos(2t+3))$ als Stammfunktionsterm zu $\sin(2t+3)$ und erhält damit

   $$\int_0^\pi \sin(2t+3)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\cos(2t+3)\right]_0^\pi = -\frac{1}{2}\left(\cos(2\pi+3) - \cos(3)\right) = 0.$$

   Zur Berechnung von (2) wird die Substitutionsregel verwendet: Mit $\varphi(t) = t^2+5, f(z) = \sqrt{z}$ hat man $\varphi'(t) = 2t, \varphi(0) = 5, \varphi(2) = 9$ und somit

   $$\begin{aligned}\int_0^2 t \cdot \sqrt{t^2+5}\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^2 2t \cdot \sqrt{t^2+5}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 \varphi'(t) \cdot f(\varphi(t))\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_5^9 f(z)\ \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_5^9 z^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_5^9 = \frac{1}{3} \cdot (27 - 5 \cdot \sqrt{5}) = 9 - \frac{5}{3}\sqrt{5} \approx 5,273.\end{aligned}$$

   Die Auswertung des dritten Integrals erfolgt mit Hilfe partieller Integration:

   $$\int_1^e \ln(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^e 1 \cdot \ln(t)\ \mathrm{d}t = [t \cdot \ln(t)]_1^e - \int_1^e t \cdot \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = e - 0 - (e-1) = 1.$$

3. Beweise als Folgerung aus dem Positivitätssatz:
   Ist die reellwertige Funktion f stetig auf $[a;b]$ und gilt $f(x) \geq 0$ für alle x aus $[a;b]$, so hat das Integral von f genau dann den Wert 0, wenn die Funktion f konstant mit dem Wert 0 ist.

   Lösung: Die konstante Funktion mit dem Wert 0 hat das Integral 0. Nachfolgend wird gezeigt, dass das Integral von f positiv ist, wenn es im Intervall $[a;b]$ eine Stelle c mit $f(c) > 0$ gibt.

   Der Beweis wird zunächst für den Fall geführt, dass c innerer Punkt von $[a;b]$ ist. Nach dem Posititvitätssatz gibt es eine positive Zahl δ, für die gilt: $[c-\delta; c+\delta]$ ist Teilmenge von $[a;b]$ und $f(x) > \frac{f(c)}{2} > 0$ für $x \in [c-\delta; c+\delta]$. Für die Zerlegung $Z = (a; c-\delta; c+\delta, b)$ hat die Untersumme $U(f,Z)$ dann einen Wert, der größer als $\delta \cdot f(c)$, also positiv ist. Als Supremum aller Untersummen ist daher das Integral von f positiv.

   Falls c ein Randpunkt des Intervalls $[a;b]$ ist, erfolgt der Nachweis analog mit einseitigen Umgebungen.

4. Berechne $\int_{-4}^4 |x|\ \mathrm{d}x$.

   Lösung: Da der Integrand gerade und das Integrationsintervall symmetrisch zu 0 ist, hat man

   $$\int_{-4}^4 |x|\ \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^4 |x|\ \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^4 x\ \mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 16.$$

7.5 Klausur 12.2.1

7.5.1 Aufgabe 1

Auf der Menge $R \setminus \{2\}$ ist die rationale Funktion f durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x-2}$ gegeben.

1. Führe eine Kurvendiskussion durch.

   Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x-2}; \qquad f'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3x^2(x-2) - x^3}{(x-2)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2x^3) - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^3) - 3x^2}{3(x-2)^2} = \frac{x^2(x-3)}{3(x-2)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(x-2)^2(3x^2-6x) - (x^3-3x^2) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{(x-2)(3x^3-12x^2+12x) - (x-2)(2x^3-6x^2)}{3(x-2)^4} \\ &= \frac{x^3-6x^2+12x}{3(x-2)^3} = \frac{x(x^2-6x+12)}{3(x-2)^3} \end{aligned}$$

   Die Nullstellenmengen $O_f = \{0\}, O_{f'} = \{0;3\}$ und $O_{f''} = \{0\}$ sind jeweils an der Faktorzerlegung der Zähler abzulesen; bei $f''(x)$ ist der Faktor $x^2-6x+12 = (x-3)^2+3$ immer positiv. Als stetige Funktionen können f, f', f'' nur an ihren Nullstellen und an der Definitionslücke das Vorzeichen wechseln. Mit den kritischen Stellen 0; 2 und 3 ergibt sich daher die folgende Vorzeichentabelle für die Funktion und ihre ersten beiden Ableitungen:

x	$-\infty$	0	2	3	∞
f(x)		>0	<0	>0	
f'(x)		<0	<0	<0	>0
f"(x)		>0	<0	>0	

   Wegen $f(3) = 4,5$ hat der Graph von f den folgenden Verlauf: Er verläuft fallend und linksdrehend im zweiten Quadranten bis zum Ursprung, hat dort einen Sattelpunkt und fällt weiter - nun rechtsdrehend - im vierten Quadranten, wo er sich asymptotisch der senkrechten Geraden mit der Gleichung x=3 nähert. Nach einem plus/minus-Vorzeichenwechsel an der Polstelle 3 fällt der Graph linksdrehend zum lokalen Tiefpunkt P(3; 4,5) und steigt dann wieder linksdrehend.

2. Bestimme die Gleichung der zu f asymptotischen ganzrationalen Funktion g.

   Für welche x-Werte unterscheiden sich $f(x)$ und $g(x)$ um weniger als $\frac{1}{3}$?

   Lösung: Durch Polynomdivision erhält man:

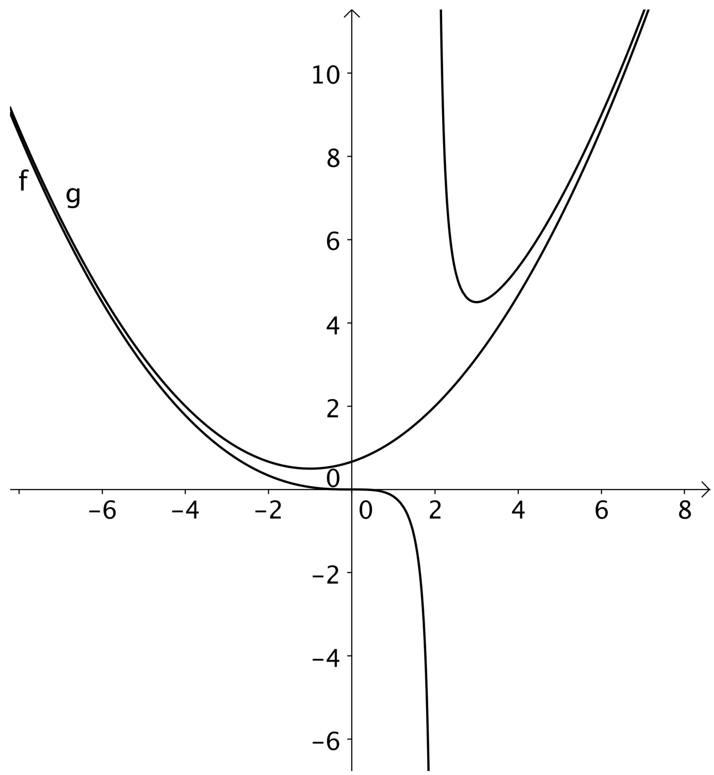
$$x^3 = (x-2) \cdot (x^2+2x+4) + 8; \text{mit } g(x) = \frac{1}{6}(x^2+2x+4) \text{ hat man also } f(x) = g(x) + \frac{4}{3(x-2)}.$$

$$|f(x) - g(x)| < \frac{1}{3} \iff \frac{4}{3|x-2|} < \frac{1}{3} \iff |x-2| > 4 \iff (x < -2 \lor x > 6)$$

   Ergebnis: Die gesuchte Funktion g hat die Gleichung $g(x) = \frac{1}{6}(x^2+2x+4)$; für alle Stellen x außerhalb von [-2; 6] unterscheiden sich die Funktionswerte von f und g um weniger als $\frac{1}{3}$.

3. Skizziere die Graphen der Funktionen f und g.

   Lösung:



4. Die y-Achse, die Parallele zur y-Achse durch den Punkt mit dem Koordinatenpaar (-6; 0) und die Graphen von f und g beranden gemeinsam ein Flächenstück. Berechne seinen Inhalt A.

   Lösung: Da $f(x) - g(x) = \frac{4}{3(x-2)}$ für negatives x negativ ist, verläuft über dem Intervall [-6; 0] der Graph von f unterhalb des Graphen von g; für den gesuchten Flächeninhalt A ergibt sich daher

$$A = \int_{-6}^{0} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = -\frac{4}{3}\int_{-6}^{0} \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x = -\frac{4}{3}\left[ln|x-2|\right]_{-6}^{0} = \frac{4}{3}(\ln(8) - \ln(2)) \approx 1,848.$$

5. Eine Kurve, die den Graphen von f an allen Stellen berührt, an denen dieser eine waagerechte Tangente hat, heißt *f-deckend*. Bestimme eine ganzrationale Funktion möglichst kleinen Grades, deren Graph f-deckend ist.

   Lösung: Für die gesuchte ganzrationale Funktion ist notwendig und hinreichend $h(0) = h'(0) = 0$, die Funktion enthält also einen Faktor x^2. Wegen der beiden weiteren Bedingungen $h(0) = 0$ und $h(3) = 4,5$ ergibt sich mit dem Ansatz $h(x) = ax^3 + bx^2$ wegen $h'(x) = 3ax^2 + 2bx$ durch Einsetzen:

$$27a + 9b = 0 \text{ und } 27a + 6b = 0, \text{ also } b = \frac{3}{2}, \quad a = -\frac{1}{3}.$$

   Die gesuchte f-deckende Funktion hat also die Gleichung $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

7.5.2 Aufgabe 2

Im Raum liegen die drei Punkte $A(7; 12; -6), B(13; 24; 6), C(13; 18; 24)$.

1. Zeige, dass C nicht auf der Geraden durch A und B liegt, und bestimme im Dreieck ABC die Größen a und α.

   Lösung:

$$\vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 24 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Die beiden Richtungsvektoren $\vec{c}-\vec{a}$ und $\vec{b}-\vec{a}$ haben nicht-proportionale Komponenten, sind also linar unabhängig. C liegt somit nicht auf der Geraden durch A und B.

$$a = ||\vec{c}-\vec{b}|| = \left\| \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 24 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} \right\| = 6 \cdot \sqrt{0^2+1^2+3^2} = 6 \cdot \sqrt{10} \approx 18,97.$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(\vec{b}-\vec{a}) * (\vec{c}-\vec{a})}{||\vec{b}-\vec{a}|| \cdot ||\vec{c}-\vec{a}||} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1+2+10}{3 \cdot \sqrt{27}} = \frac{13}{9\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{13}{9\sqrt{3}}\right) \approx 33,49^\circ$$

2. Vom Schwerpunkt S des Dreiecks ABC wird das Lot auf die Seite BC gefällt. Bestimme die Koordinaten des Lotfußpunktes L.

   <u>Lösung:</u> Der Dreiecksschwerpunkt S hat den Ortsvektor $\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, sein Koordinatentripel ist also $(\frac{1}{3}(7+13+13); \frac{1}{3}(12+24+18; \frac{1}{3}(-6+6+24)) = (11; 18; 8)$.

   Da L auf AB liegt, hat der Ortsvektor von L eine Darstellung der Form $\vec{l} = \vec{a}+r(\vec{b}-\vec{a})$. Durch Gleichsetzen mit der Darstellung $\vec{l} = \vec{s}+(\vec{l}-\vec{s})$ und Bildung des skalaren Produkts beider Seiten der Gleichung mit dem zu $(\vec{l}-\vec{s})$ orthogonalen Vektor $(\vec{b}-\vec{a})$ und anschließendes Auflösen nach r erhält man

$$\vec{a} * (\vec{b}-\vec{a}) + r(\vec{b}-\vec{a}) * (\vec{b}-\vec{a}) = \vec{s} * (\vec{b}-\vec{a}); r = \frac{(\vec{s}-\vec{a}) * (\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a}) * (\vec{b}-\vec{a})}; \quad \vec{l} = \vec{a} + \frac{(\vec{s}-\vec{a}) * (\vec{b}-\vec{a})}{(\vec{b}-\vec{a}) * (\vec{b}-\vec{a})}(\vec{b}-\vec{a}).$$

Wegen $\vec{s}-\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$ folgt daraus $\vec{l} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$, und nach Kürzen

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{44}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 107 \\ 196 \\ 34 \end{pmatrix}; \quad L = \left(\frac{107}{9}; \frac{196}{9}; \frac{34}{9}\right).$$

3. Der Mittelpunkt der Strecke AB sei D, der Mittelpunkt der Strecke CD sei E. Die Gerade durch A und E schneidet die Seite BC in einem Punkt F.

   Ermittle die Koordinaten von D, E und F, und berechne damit das Teilungsverhältnis $\frac{BF}{BC}$.

   <u>Lösung:</u> Da F auf der Geraden durch A und E, und auch auf der Strecke BC liegt, läßt sich der Ortsvektor von F als $\vec{f} = \vec{a}+r(\vec{e}-\vec{a})$ und als $\vec{f} = \vec{b}+s(\vec{c}-\vec{b})$ darstellen; dabei gibt s das gesuchte Teilungsverhältnis an. Wegen

$$\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}) = \begin{pmatrix} 11,5 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ liefert Gleichsetzen der Darstellungen}$$

$$\text{von } \vec{f}: \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 11,5-7 \\ 18-12 \\ 12+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 24 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}, \text{ also } r \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Die komponentenweise Betrachtung der letzten Gleichung liefert $r = \frac{6}{4{,}5} = \frac{4}{3}$; wegen $6r + 6s = 12$ erhält man damit $s = \frac{2}{3}$.

Damit ist $\vec{f} = \vec{b} + s(\vec{c} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 13 \\ 24 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 18 \end{pmatrix}$; $\quad F = (13; 20; 18)$.

4. Berechne allgemein (ohne Verwendung der konkret gegebenen Koordinaten und mit Hilfe linear unabhängiger Vektoren) das Teilungsverhältnis $\frac{BF}{BC}$.

   Lösung: Da die Lage des Ursprungs ohne Einfluß auf das gesuchte Teilungsverhältnis ist, sei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) B der Ursprung im Koordinatensystem. Nach Voraussetzung ist dann

$$\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{e} = \vec{c} + \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{c}) = \vec{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{a}.$$

   Der Ortsvektor von F hat einerseits eine Darstellung der Form $\vec{f} = s\vec{c}$, wobei der Parameter s das gesuchte Teilungsverhältnis angibt; andererseits liegt F auf der Geraden durch A und E; für den Ortsvektor von F gibt es daher auch eine Darstellung der Form

$$\vec{f} = \vec{a} + r(\vec{e} - \vec{a}) = \vec{a} + r\left(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{a} - a\right) = \vec{a} - \frac{3}{4}r\vec{a} + \frac{r}{2}\vec{c}.$$

   Gleichsetzen der Darstellungen von f ergibt nach Ordnen und Zusammenfassen

$$\left(1 - \frac{3}{4}r\right)\vec{a} = \left(s - \frac{r}{2}\right)\vec{c}.$$

   Da $\vec{a}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind - sonst wäre das Dreieck ABC zu einer Strecke ausgeartet - müssen die Koeffizienten der Vektoren den Wert 0 haben, es folgt daher $4 - 3r = 0$, also $r = \frac{4}{3}$ und $s - \frac{r}{2} = 0$ und damit $s = \frac{2}{3}$; das ist das gesuchte Teilungsverhältnis.

7.5.3 Aufgabe 3

Im Vektorraum R^3 seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ gegeben.

1. Erkläre, was man unter einer *Linearkombination von* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ versteht, und wann genau man sagt, die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ seien *linear unabhängig.*

   Beweise dann: Wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ linear abhängig sind, aber $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind, läßt sich $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ darstellen.

   Lösung: Eine Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ist ein Vektor, der sich in der Form $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$ mit reellen Zahlen r, s, t, u darstellen läßt. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ werden als linear unabhängig bezeichnet, wenn $0\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} + 0\vec{d}$ die einzige Darstellung des Nullvektors $\vec{o}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ist.

   Wenn die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ linear abhängig sind, gibt es eine Darstellung des Nullvektors in der Form $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$ mit $(r; s; t; u) \neq (0; 0; 0; 0)$. Wäre $u = 0$, hattte man mit $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ eine Darstellung von $\vec{o}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, bei der nicht alle Koeffizienten den Wert 0 haben, die drei Vektoren wären also im Widerspruch zur Voraussetzung linear unabhängig.

   Somit ist $u \neq 0$ und $\vec{d} = \frac{r}{-u}\vec{a} + \frac{s}{-u}\vec{b} + \frac{t}{-u}\vec{c}$ die gesuchte Darstellung von $\vec{d}$.

2. Von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (alle drei $\neq \vec{o}$) sei vorausgesetzt, dass jeder zu den beiden anderen orthogonal ist.

   Erkläre, wann zwei Vektoren (zueinander) *orthogonal* heißen, und beweise, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind.

   Lösung: Zwei Vektoren heißen orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt den Wert 0 hat.

   Zum Nachweis der Behauptung ist zu zeigen, dass aus $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{o}$ folgt: $\quad r = s = t = 0$.

   Aus $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{o}$ folgt durch skalare Multiplikation mit $\vec{a}$: $\quad r\vec{a} * \vec{a} + 0 + 0 = 0$, also $r = 0$. Analog ergibt sich durch Bildung des Skalarprodukts mit $\vec{b}, \vec{c}$: $\quad s = 0$ bzw. $t = 0$. Das war zu zeigen.

3. Für beliebige Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aus R^3 definiere man $\vec{x} ** \vec{y}$ durch die folgende Gleichung:

   $\vec{x} ** \vec{y} = 3x_1 \cdot y_1 + 5x_2 \cdot y_2 + 2x_3 \cdot y_3 - 2x_1 \cdot y_3 - 2x_3 \cdot y_1$; dabei sind x_1, x_2, x_3 die Komponenten von $\vec{x}$ und y_1, y_2, y_3 die Komponenten von $\vec{y}$.

   Es ist zu beweisen, dass durch diese Definition von ** ein Skalarprodukt definiert wird.

   Lösung: Es ist zu zeigen, dass für allle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$ und für alle reellen Zahlen r, s die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

   (0) $\vec{a} ** \vec{b} \in R$

   (1) $\vec{a} ** \vec{a} \geq 0; = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$

   (2) $\vec{a} ** \vec{b} = \vec{b} ** \vec{a}$

   (3) $\vec{a} ** (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} ** \vec{b}) + (\vec{a} ** \vec{c})$

   (4) $(r\vec{a}) ** \vec{b} = r(\vec{a} ** \vec{b})$

   Die Bedingung (0) ist offensichtlich erfüllt, da die Berechnung mithilfe der Grundrechenarten mit den (reellen) Komponenten der Vektoren erfolgt.

   Zu (1): $\vec{a} ** \vec{a} = 3a_1^2 + 5a_2^2 + 2a_3^2 - 2a_1 \cdot a_3 - 2a_3 \cdot a_1 = (a_1 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2 + a_1^2 + 5a_2^2$; das ist als Summe von Quadraten nie negativ und nur null, wenn alle quadrierten Zahlen den Wert 0 haben, also wenn gilt: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

   Zu (2): $\vec{a} ** \vec{b} = 3a_1b_1 + 5a_2b_2 + 2a_3b_3 - 2a_1b_3 - 2a_3b_1 = 3b_1a_1 + 5b_2a_2 + 2b_3a_3 - 2b_1a_3 - 2b_3a_1 = \vec{b} ** \vec{a}$.

   Zu (3): $\vec{a} ** (\vec{b} + \vec{c}) = 3a_1(b_1 + c_1) + 5a_2(b_2 + c_2) + 2a_3(b_3 + c_3) - 2a_1(b_3 + c_3) - 2a_3(b_1 + c_1)$

   $= (3a_1b_1 + 5a_2b_2 + 2a_3b_3 - 2a_1b_3 - 2a_3b_1) + (3a_1c_1 + 5a_2c_2 + 2a_3c_3 - 2a_1c_3 - 2a_3c_1) = (\vec{a} ** \vec{b}) + (\vec{a} ** \vec{c})$

   Zu (4): $(r\vec{a}) ** \vec{b} = 3(ra_1)b_1 + 5(ra_2)b_2 + 2(ra_3)b_3 - 2(ra_1)b_3 - 2(ra_3)b_1$

   $= r \cdot (3a_1b_1 + 5a_2b_2 + 2a_3b_3 - 2a_1b_3 - 2a_3b_1) = r(\vec{a} ** \vec{b})$

4. Im Raum sind acht Punkte hellrot, acht Punkte hellgrün, acht Punkte hellblau und acht Punkte hellviolett gefärbt. Zu jeder dieser Gruppen von acht Punkten wird der Schwerpunkt bestimmt und entsprechend (dunkelrot, dunkelgrün, dunkelblau oder dunkelviolett) gefärbt.

   Entscheide (mit Nachweis), ob die vier dunkel gefärbten Punkte nun den gleichen Schwerpunkt haben wie die zweiunddreißig hell gefärbten Punkte.

   Lösung: Die Ortsvektoren der acht hellroten Punkte seien mit $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_8$ bezeichnet; der Schwerpunkt der hellroten Punkte habe den Ortsvektor $\vec{r}$. Entsprechend seien die Ortsvektoren der hellgrünen Punkte mit $\vec{g}_i$, die Ortsvektoren der hellblauen Punkte mit $\vec{b}_i$ und die Ortsvektoren der hellvioletten Punkten mit $\vec{v}_i$ bezeichnet (i = 1,2, ..., 8), und die Ortsvektoren der jeweiligen Gruppe seien $\vec{g}$ bzw. $\vec{b}$ bzw. $\vec{v}$. Nach der Formel für den Ortsvektor des Schwerpunkts ergibt sich:

   $$\vec{r} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \vec{r}_i, \quad \vec{g} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \vec{g}_i, \quad \vec{b} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \vec{b}_i, \quad \vec{v} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \vec{v}_i$$

   Für den Ortsvektor $\vec{s}$ des Schwerpunkts der vier dunkel gefärbten Punkte gilt daher

   $$\vec{s} = \frac{1}{4}(\vec{r} + \vec{g} + \vec{b} + \vec{v}) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \vec{r}_i + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \vec{g}_i + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \vec{b}_i + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} \vec{v}_i\right)$$
   $$= \frac{1}{32}\left(\sum_{i=1}^{8} \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{8} \vec{g}_i + \sum_{i=1}^{8} \vec{b}_i + \sum_{i=1}^{8} \vec{v}_i\right).$$

   Der letzte Ausdruck gibt den Ortsvektor des Schwerpunkts der 32 hell gefärbten Punkte an, also haben die vier dunkel gefärbten Punkte den gleichen Schwerpunkt wie die 32 hell gefärbten.

7.6 Klausur 12.2.2

7.6.1 Aufgabe 1

1. Beweise, dass für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$ stets die folgenden Formeln gelten:

$$(a) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} * \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} * \vec{c})\vec{a} \qquad (b) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a} * \vec{a} & \vec{a} * \vec{b} \\ \vec{a} * \vec{b} & \vec{b} * \vec{b} \end{vmatrix}$$

<u>Lösung:</u>

Zu (a): Es werden jeweils die zur Behauptung quivalenten Gleichungen $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} - \Big((\vec{a} * \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} * \vec{c})\vec{a}\Big) = 0$ bzw. $(\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{a} \times \vec{b}) - \begin{vmatrix} \vec{a} * \vec{a} & \vec{a} * \vec{b} \\ \vec{a} * \vec{b} & \vec{a} * \vec{a} \end{vmatrix} = 0$ bewiesen. Einsetzen der Platzhalter für die Komponenten ergibt:

Zu (a): $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} - (\vec{a} * \vec{c})\vec{b} + (\vec{b} * \vec{c})\vec{a} \quad = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^3 a_ic_i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^3 b_ic_i \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\ (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1 \\ (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_2 \\ (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Zu (b): $(\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{a} \times \vec{b}) - \begin{vmatrix} \vec{a} * \vec{a} & \vec{a} * \vec{b} \\ \vec{a} * \vec{b} & \vec{b} * \vec{b} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} - (\vec{a} * \vec{a}) \cdot (\vec{b} * \vec{b}) + (\vec{a} * \vec{b})^2$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$
$$= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \quad - a_1^2b_1^2 - a_1^2b_2^2 - a_1^2b_3^2$$
$$- a_2^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_2^2b_3^2 - a_3^2b_1^2 - a_3^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 \quad + a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_2b_3$$
$$= 0$$

2. Für welche (beiden) Werte von s hat das folgende lineare Gleichungssystem nicht genau eine Lösung?

$$x + sy + z = 10$$
$$x + 2y + 4z = 3$$
$$x + y + sz = 1$$

<u>Lösung:</u> Die Systemdeterminante $\begin{vmatrix} 1 & s & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & s \end{vmatrix}$ hat den Wert

$$D = (2s - 4) - (s^2 - 1) + (4s - 2) = -s^2 + 6s - 5 = (s - 5)(1 - s).$$

Das Gleichungssystem hat genau dann keine eindeutige Lösung, wenn die Systemdeterminante den Wert 0 hat, also für $s = 1$ und $s = 5$.

3. Löse mit Hilfe der Cramerschen Regel das im vorhergehenden Aufgabenteil angegebene Gleichungssystem für den Fall $s = 4$.

<u>Lösung:</u> Die Systemdeterminante hat für $s = 4$ den Wert $D = (4 - 5)(4 - 1) = 3$. Für die anderen Determinanten ergibt sich

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Ergebnis: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{9}{3} = 3; y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{3} = 2; z = \frac{D_z}{D} = \frac{-3}{3} = -1.$

7.6.2 Aufgabe 2

Im Raum schwebt ein Tetraeder T mit den Ecken $A(1;0;1), B(2;1;1), C(-1;2;9)$ und $D(2;-1;6)$.

1. Bestimme die Länge l und den Fußpunkt F des Lotes von D auf die Ebene durch A, B und C.

   Lösung: Die Ebene durch A, B, C wird nachfolgend mit E_0 bezeichnet. Ihre Normalenrichtung ist durch den Vektor $(\vec{b}-\vec{a}) \times (\vec{c}-\vec{a})$ gegeben.

   $(\vec{b}-\vec{a}) \times (\vec{c}-\vec{a}) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-8\\4\end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor ist daher $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

   Wegen $\vec{a} * \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = 3$ hat E_0 die Gleichung $2x - 2y + z = 3$.

   Der Ortsvektor des Lotfußpunkts F hat eine Darstellung der Form $\vec{f} = \vec{d} + r\vec{n} = \begin{pmatrix}2+2r\\-1-2r\\6+r\end{pmatrix}$.

   Einsetzen der Koordinaten von F in die Gleichung der Ebene E_0 ergibt $2(2+2r) - 2(-1-2r) + 6 + r = 3$, also $9r = -9$ und somit $r = -1$.

   Mithin hat F das Koordinatentripel $(2-2; -1+2; 6-1) = (0;1;5)$.

   $l = \|\vec{d} - \vec{f}\| = \left\| \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+4+1} = 3.$

2. E sei die Ebene mit der Gleichung $x - y - 2z - 15 = 0$.

   Weise nach, dass diese Ebene keinen Punkt mit dem Tetraeder T gemeinsam hat.

   Lösung: Wegen $\left\| \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6}$ erhält man beim Einsetzen der Koordinaten x, y, z eines Punktes in den Ausdruck $x - y - 2z - 15$ jeweils das $\sqrt{6}$-fache des vorzeichenbehafteten Abstands dieses Punktes von der Ebene E, wobei das Vorzeichen genau dann negativ ist, wenn der Punkt im gleichen Halbraum wie der Ursprung liegt. Der so erhaltene Wert für einen Punkt X wird nachfolgend (für $X = A, B, C, D$) abkürzend mit δX bezeichnet:

   $$\delta A = 1 - 0 - 2 - 15 = -16; \quad \delta B = 2 - 1 - 2 - 15 = -16;$$
   $$\delta C = -1 - 2 - 18 - 15 = -36; \quad \delta D = 2 + 1 - 12 - 15 = -24.$$

   Alle vier Ecken (und damit das ganze Tetraeder T) liegen also auf der gleichen Seite der Ebene E.

3. Zeige, dass der Punkt $L(0;8;11)$ auf der gleichen Seite von E liegt wie T, und dass sein Abstand zu E größer ist als der Abstand eines jeden Punktes von T zu E.

   Lösung: Nach den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgabe und mit der dort eingeführten Bezeichnung reicht der Nachweis der Ungleichung $\delta L < \min(\delta A, \delta B, \delta C, \delta D)$, also $\delta L < -36$.

   Wegen $\delta L = 0 - 8 - 22 - 15 = -45 < -36$ gilt die Ungleichung.

4. Eine im Punkte L befestigte Lichtquelle erzeugt in der Ebene E einen Schatten von T.

   Berechne die Koordinaten des Bildpunkts C' und beschreibe einen Weg zur Überprüfung, ob C' auf dem Rande der Schattenfläche liegt.

   Lösung: Ein Punkt auf der Geraden durch L und C hat einen Ortsvektor der Form $\vec{l} + r \cdot (\vec{c} - \vec{l})$, erlaubt also eine Koordinatendarstellung der Form $(0 + r(-1-0); 8 + r((2-8); 11 + r(9-11)) = (-r; 8-6r; 11-2r)$.

   Einsetzen in die Koordinatengleichung von E ergibt $-r - 8 + 6r - 22 + 4r = 15$, also $9r = 45$ und somit $r = 5$. C hat das Koordinatentripel $(-5; -22; 1)$.

   Bezeichnet man den Schnittpunkt der durch L und C gezogenen Geraden mit der Ebene des Dreiecks ABD mit C^*, dann liegt C' genau dann im Inneren der Schattenflche, wenn C^* im Inneren des Dreiecks

ABD liegt. Dazu ist äquivalent, dass in der Parameterdarstellung des Ortsvektors von C^* als Punkt der Ebene durch A, B, D - nämlich $\vec{c^*} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) + sr(\vec{d} - \vec{b})$ - die Parameter r und s beide zwischen 0 und 1 liegen.

7.6.3 Aufgabe 3

E sei die Ebene durch drei (nicht kollineare) Punkte A, B, C - dabei ist zunächst (für diesen Aufgabenteil) weder die Ebene E noch sind die Punkte A, B, C speziell gewählt.

1. F sei die Menge aller Raumpunkte X, deren Ortsvektor eine Darstellung der Form $\vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ mit $r + s + t = 1$ zuläßt.

   Welcher Zusammenhang besteht zwischen E und F ? (Nachweis!)

   Lösung: Nach Voraussetzung ist $r = 1 - s - t$, für die Parameterdarstellung eines Punktes X von F gilt daher $\vec{x} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$. Da dies eine Parameterdarstellung der Ebene E ist, folgt, dass jeder Punkt von F in E liegt. Die gleiche Umformung in anderer Richtung zeigt, dass auch jeder Punkt der Ebene E zu F gehört. Die beiden Punktmengen sind also identisch.

2. Nun werden A und B wie in Aufgabe 2 gewählt; P sei der Punkt mit dem Koordinatentripel (-1; -5; 1). E_0 sei die Ebene durch A, B und den Ursprung O.

   Bestimme die Schnittmenge der beiden Ebenen E und E_0.

   Lösung: Die Normalen der Ebene E_0 haben die Richtung $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Die Ebene E_0 hat also die Gleichung $x - y - z = 0$. Da die Normalenvektoren der beiden Ebenen linear unabhängig sind, schneiden sich die Ebenen in einer Geraden. Ein Punkt mit Koordinatentripel $(x; 0; z)$ liegt genau dann in beiden Ebenen, also auf der Schnittgeraden, wenn beide Gleichungen $x - z = 0$ Und $x - 2z = 15$ erfüllt sind, also wenn $(x; z) = (-15; -15)$ gilt. Ein gemeinsamer Punkt beider Ebenen ist also z.B. $Q(-15; 0; -15)$. Da die Schnittgerade der Ebenen orthogonal zu beiden Normalenrichtungen ist, wird sie durch das Kreuzprodukt der beiden Normalenvektoren erhalten: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Ergebnis: Die Schnittmenge ist eine Gerade mit der Parameterdarstellung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Die drei Koordinatenachsen schneiden E in Punkten X_0, Y_0 und Z_0.

   Berechne die Koordinaten dieser Punkte sowie den Flächeninhalt von Dreieck $X_0Y_0Z_0$.

   Lösung: Für die Koordinaten $(x; y; z)$ eines Schnittpunktes von E mit der x-Achse gilt $y = z = 0$, also $x - 0 - 2 \cdot 0 = 15$, und somit $x = 15$.

   Daher ist $X_0 = (15; 0; 0)$. Analog ergibt sich $Y_0 = (0; -15; 0)$ und $Z_0 = (0; 0; -7,5)$.

   Der Flächeninhalt F des Dreiecks errechnet sich als halbe Norm des Kreuzprodukts aus zwei das Dreieck aufspannenden Vektoren:

   $$F = \frac{1}{2}\|(\vec{x}_0 - \vec{y}_0) \times \vec{x}_0 - \vec{z}_0)\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 7,5 \end{pmatrix} \right\| = 7,5^2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 7,5^2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|$$

   Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also $7,5^2 \cdot \sqrt{6}$, also ca. 137,78 .

4. Bestimme die Größe α des Winkels zwischen den Ebenen E und E_0.

Lösung: Bezeichnet man die Normalenvektoren der Ebenen E und E_0 mit $\vec{n}$ bzw. $\vec{n}_0$, dann berechnet sich der Kosinus des gesuchten Winkels α als $\frac{\vec{n}*\vec{n}_0}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{n}_0\|}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}; \quad \alpha = \arccos\frac{4}{\sqrt{18}} \approx 19,47^\circ.$$

7.7 Klausur 13.1.1

7.7.1 Aufgabe 1

In P_3 wird durch die Definition $f * g = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ bekanntlich ein Skalarprodukt erklärt. U sei der von p_2, p_1, p_0 aufgespannte Unterraum.
Bezeichnungserläuterung (nachträglich für spätere Leser eingefügt): P_3 ist der Vektorraum der ganzrationalen Funktionen vom Grade ≤ 3; p_i ist die Potenzfunktion i-ten Grades ($p_1(x) = x^i$ für i = 0, 1, 2, 3).

1. Bestimme eine ONB von U durch Orthonormieren von $\{p_2, p_1, p_0\}$ in dieser Reihenfolge.

   (Zur Kontrolle: Man erhält $b_3 = 10p_2 - 12p_1 + 3p_0$).

   Lösung: Die Ergebnisse der Orthonormierung werden (in dieser Reihenfolge) mit b_1, b_2, b_3 bezeichnet.

   $p_i * p_j = \int_0^1 x^{i+j}dx = \frac{1}{i+j+1}$; $\quad b_1' = p_2; \|b_1'\| = \|p_2\| = \sqrt{p_2 * p_2} = \sqrt{\frac{1}{5}}$; $\quad b_1 = \frac{1}{\|p_2\|}p_2 = \sqrt{5}\ p_2$.

   $b_2' = p_1 - (b_1 * p_1)\ b_1 = p_1 - 5(p_2 * p_1)p_2 = p_1 - \frac{5}{4}p_2 = \frac{1}{4}(4p_1 - 5p_2)$

   $\|b_2'\| = \frac{1}{4}\sqrt{16p_1 * p_1 - 40p_1 * p_2 + 25p_2 * p_2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16}{3} - 10 + 5} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\quad b_2 = \frac{1}{\|b_2'\|} = \sqrt{3}(4p_1 - 5p_2)$.

   $b_3' = p_0 - (b_1 * p_0)b_1 - (b_2 * p_0)b_2 = p_0 - 5(p_2 * p_0)p_2 - 3(4p_1 * p_0 - 5p_2 * p_0)(4p_1 - 5p_2)$
   $= p_0 - \frac{5}{3}p_2 - 3(2 - \frac{5}{3})(4p_1 - 5p_2) = p_0 - \frac{5}{3}p_2 - 4p_1 + 5p_2 = p_0 - 4p_1 + \frac{10}{3}p_2 = \frac{1}{3}(3p_0 - 12p_1 + 10p_2)$

   $\|b_3'\| = \frac{1}{3}\sqrt{9p_0 * p_0 + 144p_1 * p_1 + 100p_2 * p_2 - 72p_0 * p_1 + 60p_0 * p_2 - 240p_1 * p_2}$
   $= \frac{1}{3}\sqrt{9 + 48 + 20 - 36 + 20 - 60} = \frac{1}{3}$; $\quad b_3 = \frac{1}{\|b_3'\|}b_3' = 3p_0 - 12p_1 + 10p_2$.

2. Man erklärt eine Abbildung φ von P_3 in U, indem man jedem Vektor p aus P_3 als Bild $\varphi(p)$ den p aus U heraus optimal approximierenden Vektor zuordnet. Weise nach, dass die Abbildung φ linear und nicht injektiv ist, und bestimme Bild(φ).

   Lösung: Der p aus U heraus optimal approximierende Vektor ist $\sum_{i=1}^3 (b_i * p)b_i$. $\quad\varphi$ ist linear, denn

$$\varphi(tp + sq) = \sum_{i=1}^3 (b_i * (tp + sq))b_i = \sum_{i=1}^3 (b_i * p + b_i * sq)b_i = \sum_{i=1}^3 (t(b_i * p)b_i + s(b_i * q)b_i)$$
$$= \sum_{i=1}^3 t(b_i * p)b_i + \sum_{i=1}^3 s(b_i * q)b_i = t \cdot \sum_{i=1}^3 (b_i * p)b_i + s \cdot \sum_{i=1}^3 (b_i * q)b_i = t \cdot \varphi(p) + s \cdot \varphi(q).$$

   Da U Teilmenge von P_3 ist und jedes Element von U sein eigenes Bild ist, folgt: Bild(φ) = U.

3. Erkläre allgemein, was man unter $U^\perp$ versteht, und weise nach, dass der Vektor $p - \varphi(p)$ für jedes p aus P_3 in $U^\perp$ liegt.

   Lösung: $U^\perp$ ist die Menge aller Elemente von P_3, die orthogonal zu jedem Element von U sind.

   Da (b_1, b_2, b_3) eine Basis von U ist, genügt es zu zeigen, dass für jedes j aus $\{1, 2, 3\}$ und für jedes p aus P_3 der Vektor $p - \varphi(p)$ orthogonal zu b_j ist.

$$\left(p - \sum_{i=1}^3 (b_i * p)b_i\right) * b_j = p * b_j - \sum_{i=1}^3 (b_i * p)b_i * b_j = p * b_j - \sum_{i=1}^3 (b_i * p)\delta_{ij} = p * b_j - b_j * p = 0.$$

4. Berechne den Vektor $\varphi(p_3)$; überprüfe anhand dieses speziellen Ergebnisses die Orthogonalitätsaussage aus dem vorhergehenden Aufgabenteil.

   Lösung: $\varphi(p_3) = (p_3 * b_1)b_1 + (p_3 * b_2)b_2 + (p_3 * b_1)b_1$

$$= 5 \cdot \frac{1}{6}p_2 + 3 \cdot (\frac{4}{5} - \frac{5}{6})(4p_1 - 5p_2) + (\frac{3}{4} - \frac{12}{5} + \frac{5}{3})(3p_0 - 12p_1 + 10p_2)$$
$$= \frac{5}{6}p_2 + (-\frac{1}{10})(4p_1 - 5p_2) + \frac{45 - 144 + 100}{60}(3p_0 - 12p_1 + 10p_2)$$
$$= \frac{5}{6}p_2 - \frac{2}{5}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{60}(3p_0 - 12p_1 + 10p_2) = \frac{5}{6}p_2 - \frac{2}{5}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{20}p_0 - \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{6}p_2$$
$$= \frac{1}{20}p_0 - \frac{3}{5}p_1 + \frac{3}{2}p_2$$

$$p_3 - \varphi(p_3) = p_3 - \frac{1}{20}p_0 + \frac{3}{5}p_1 - \frac{3}{2}p_2$$

   Zum Nachweis, dass $p_3 - \varphi(p_3)$ orthogonal zu allen Vektoren aus U ist, wird gezeigt, dass die Skalarprdukte mit den Basisvektoren p_0, p_1, p_2 den Wert 0 haben.

   $(p_3 - \frac{1}{20}p_0 + \frac{3}{5}p_1 - \frac{3}{2}p_2) * p_0 = p_3 * p_0 - \frac{1}{20}p_0 * p_0 + \frac{3}{5}p_1 * p_0 - \frac{3}{2}p_2 * p_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = 0$
   $(p_3 - \frac{1}{20}p_0 + \frac{3}{5}p_1 - \frac{3}{2}p_2) * p_1 = p_3 * p_1 - \frac{1}{20}p_0 * p_1 + \frac{3}{5}p_1 * p_1 - \frac{3}{2}p_2 * p_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{40} + \frac{1}{5} - \frac{3}{8} = 0$
   $(p_3 - \frac{1}{20}p_0 + \frac{3}{5}p_1 - \frac{3}{2}p_2) * p_2 = p_3 * p_2 - \frac{1}{20}p_0 * p_2 + \frac{3}{5}p_1 * p_2 - \frac{3}{2}p_2 * p_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{60} + \frac{3}{20} - \frac{3}{10} = 0$

7.7.2 Aufgabe 2

Die Punkte A, B und S sind durch ihre unten angegebenen Koordinaten gegeben; g sei die Gerade durch A und O (Ursprung); E sei die Ebene durch A, B und O. A = (-2; 2; -6), B=(1; -3; 2), S=(-11;14;12).

1. Zeige, dass die drei Punkte A, B und O nicht kollinear sind, und bestimme Parameterdarstellungen von g und E .

   Lösung: Da die Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht proportional sind, sind $\vec{a}, \vec{b}$ nicht linear abhängig, B liegt also nicht auf der Ursprungsgeraden durch A. Richtungsvektor der Ursprungsgerade g ist $\vec{a}$, Richtungsvektoren der Ursprungsebene E sind $\vec{a}, \vec{b}$. Die gesuchten Parametergleichungen sind somit $\vec{x} = r\vec{a}$ und $\vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b}$, mit den gegebenen Werten also:

$$g : \vec{x} = r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad E : \vec{x} = r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. L_1 sei der Fußpunkt des Lotes von S auf g. Wähle die Voraussetzungen des Approximationssatzes so speziell, dass sich als optimal approximierender Vektor $\vec{l_1}$(der Ortsvektor von L_1) ergibt. Bestimme L_1 durch Anwendung des Approximationssatzes.

   Lösung: Mit der linearen Hülle von $\vec{a}$ als Unterraum U_1 ist der Ortsvektor des gesuchten Punktes L_1 derjenige Vektor, der S aus U_1 heraus optimal approximiert. Normieren von $\vec{a}$ zum Vektor $\vec{u}_1$ ergibt

$$\vec{u_1} = \vec{a}^0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   Der $\vec{s}$ aus U_1 heraus optimal approximierende Vektor ist dann

$$\vec{l_1} = (\vec{u_1} * \vec{s})\vec{u_1} = \frac{11 + 14 - 36}{11} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad L_1 = (1; -1; 3).$$

3. L_2 sei der Fußpunkt des Lotes von S auf E. Wähle die Voraussetzungen des Approximationssatzes so speziell, dass sich als optimal approximierender Vektor $\vec{l_2}$ (der Ortsvektor von L_2) ergibt. Bestimme L_2 durch Anwendung des Approximationssatzes.

   Lösung: Der von den Richtungsvektoren aufgespannte Unterraum U_2 hat die Basis $(\vec{u}_1, \vec{b})$. Durch Orthonormieren erhält man als zweiten Vektor $\vec{u}_2$ einer Orthonormalbasis $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ von U_2:

$$\vec{u_2}' = \vec{b} - (\vec{u}_1 * b)\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1+3+6}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10}{11}\begin{pmatrix} 11-10 \\ -33+10 \\ 22-30 \end{pmatrix} = \frac{10}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -23 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2+23^2+8^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -23 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{594}}\begin{pmatrix} 1 \\ -23 \\ -8 \end{pmatrix}$$

   Man erhält $\vec{l_2}$ als optimalen Vektor der Approximation von $\vec{s}$ aus U_2 heraus:

$$\vec{l_2} = (\vec{u_1} * \vec{s})\vec{u_1} + (\vec{u_2} * \vec{s})\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{-429}{594}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{13}{18}\begin{pmatrix} 1 \\ -23 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{l_2} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18-13 \\ -18+13\cdot 23 \\ 3\cdot 18+8\cdot 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 \\ 281 \\ 158 \end{pmatrix}; \qquad L_2 \approx (0,278; 16,61; 8,78).$$

4. Die Durchführung der Teilaufgaben 2. und 3. ergibt, dass L_1 und L_2 verschieden sind. Bestimme die Menge aller Punkte X, die anstelle von S in den vorhergehenden Aufgabenteilen verwendet zu Ergebnissen führen, bei denen L_1 und L_2 gleich sind.

   Lösung: Die Punkte L_1 und L_2 fallen zusammen, wenn der Fußpunkt des von X auf die Ebene E gefällten Lotes auf g liegt, wenn also X in der Ebene durch g mit dem Normalenvektor $\vec{u}_2$ liegt. Die gesuchte Menge besteht also aus den Punkten der Ebene mit der Gleichung $\vec{x} * \vec{u}_2 = 0$.

7.7.3 Aufgabe 3

1. Bestimme irgendeine orthonormierte Basis B= $\{\vec{b_1}; \vec{b_2}; \vec{b_3}\}$ von R^3, wobei $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}$ ist.

   Lösung: Die folgenden normierten Vektoren $\vec{b}_2, \vec{b}_3$, die sowohl zu $\vec{b_1}$ als auch zueinander orthogonal sind, lassen sich erraten:

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \\ -0,6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Nun definiert man eine Abbildung φ von R^3 in R^3, indem man jedem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ den Bildvektor $x\vec{b_1} + y\vec{b_2} + z\vec{b_3}$ zuordnet. Zeige, dass die Abbildung φ linear ist.

   Lösung: Zu zeigen ist, dass für alle Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und alle reellen Zahlen r, s die folgende Gleichung erfüllt ist: $\varphi(r\vec{u} + s\vec{v}) = r\varphi(\vec{u}) + s\varphi(\vec{v})$. Bezeichnet man die Komponenten mit u_1, u_2, u_3 bzw. v_1, v_2, v_3, so ergibt sich

$$\varphi(r\vec{u} + s\vec{v}) = \sum_{i=1}^{3}(ru_i + sv_i)\vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3} ru_i\vec{b}_i + \sum_{i=1}^{3} sv_i\vec{b}_i = r\sum_{i=1}^{3} u_i\vec{b}_i + s\sum_{i=1}^{3} v_i\vec{b}_i = r\varphi(\vec{u}) + s\varphi(\vec{v})$$

3. Weise nach, dass die Abbildung φ sogar isometrisch (längentreu) ist, das heißt, dass für jeden Vektor aus R^3 der Bildvektor die gleiche Norm wie der Urbildvektor hat.

   Lösung: Da die Norm eines Vektors nicht negativ ist, genügt der Nachweis, dass die Quadrate der Normen von Urbild- und Bildvektor übereinstimmen. Dazu werden nicht die speziell gewählten Werten von $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ benutzt, sondern es wird lediglich verwendet, dass diese Vektoren eine Orthonormalbasis des Raumes R^3 bilden, also jeweils die Norm 1 und paarweise das Skalarprodukt 0 haben ($\vec{b}_i * \vec{b}_j = \delta_{ij}$) .

$$\|\varphi(\vec{u})\|^2 = \sum_{i=1}^{3} u_i\vec{b}_i * \sum_{j=1}^{3} u_j\vec{b}_j = \sum_{i=1}^{3} u_i^2 = \|\vec{u}\|^2.$$

7.7.4 Aufgabe 4

Im (x,y)-Koordinatensystem sind n Punkte $(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_n; y_n)$ gegeben. Es wird eine Parabel höchstens zweiter Ordnung gesucht, die durch den Ursprung verläuft und die Punkte in folgendem Sinne möglichst gut approximiert: Ist $p(x)$ der Funktionsterm der Parabel, so soll der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n}(p(x_i) - y_i)^2$ möglichst klein sein.
Spezialisiere die Voraussetzungen für den Approximationssatz so, dass sich damit eine Lösung dieses Problems ergibt, und skizziere den Lösungsweg.
Lösung: Zunächst wird (als lineare Hülle) der folgende Unterraum U des Raumes R^n und der folgende Vektor $\vec{y}$ betrachtet:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die folgende Überlegung setzt voraus: $n \geq 3$ und x_1, x_2, x_3 paarweise verschieden. Andernfalls vereinfacht sich das Vorgehen.
Nun wird aus U heraus den Vektor $\vec{y}$ des Raumes R^n nach Aufstellen einer Orthonormalbasis von U approximiert. Nach dem Verfahren des Approximationssatzes erhält man einen Vektor $\vec{z} \in U$, für den $\|\vec{z} - \vec{y}\|$ minimal ist. Wenn dann $\vec{z}$ bezüglich der Basis $((1)_{i=1}^n, (x_i)_{i=1}^n, (x_i^2)_{i=1}^n)$ die Koordinaten a, b, c hat , dann gilt:

$$\|\vec{z} - \vec{y}\|^2 = \left\| a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2.$$

Wählt man also für die gesuchte Parabel die Funktionsgleichung $p(x) = a+bx+cx^2$, so leistet diese die verlangte optimale Approximation.

7.8 Klausur 13.1.2

7.8.1 Aufgabe 1

Zu den reellen Zahlen c, p, q, r, s bildet man in R^3 folgende vier Vektoren

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_3} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

und in R^4 die vier Vektoren

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, \quad \vec{d_2} = \begin{pmatrix} q \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ r \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{d_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Für welche Werte von c gibt es genau eine lineare Abbildung φ von R^3 nach R^4 mit

   - $\varphi(\vec{a_1}) = \vec{d_1}, \quad \varphi(\vec{a_2}) = \vec{d_2}$ und $\varphi(\vec{a_3}) = \vec{d_3}$

   Lösung: Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Abbildungen gibt es genau dann eindeutig eine lineare Abbildung φ mit $\varphi(\vec{a}_i) = \vec{d_i}$ für $i = 1, 2, 3$, wenn die drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ eine Basis des dreidimensionalen Raumes R^3 bilden, also linear unabhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn ihr Spatprodukt verschieden von null ist.

   $$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 6c - 2 \quad ; = 0 \text{ nur für } c = \frac{1}{3}.$$

   Es gibt also für alle Werte von c außer $c = \frac{1}{3}$ genau eine derartige Abbildung.

2. Man wählt nun speziell für c den Wert $c = 3$. Zeige, dass es dann eindeutig bestimmte reelle Zahlen p, q, r, s und genau eine lineare Abbildung φ von R^3 nach R^4 gibt mit

   - $\varphi(\vec{a_1}) = \vec{d_1}, \quad \varphi(\vec{a_2}) = \vec{d_2}, \quad \varphi(\vec{a_3}) = \vec{d_3} \quad \varphi(\vec{a_4}) = \vec{d_4}$

   Bestimme diese Werte p, q, r, s.

   Lösung: Für $c = 3$ bilden nach dem vorhergehenden Aufgabenteil die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ eine Basis von R^3; $\quad \vec{a}_4$ ist also als Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ darstellbar: $t\vec{a}_1 + u\vec{a}_2 + v\vec{a}_3 = \vec{a}_4$. t, u, v sind die Komponenten des Lösungsvektors im Gleichungssystem

   $$t + 2u + 3v = 1 \quad \wedge \quad t + v = 1 \quad \wedge \quad t + 6u + v$$

   Die zugehörige Systemdeterminante wurde im vorhergehenden Aufgabenteil (als Spatprodukt für allgemeines c als $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 6c - 2$) berechnet, beträgt also $D = 6 \cdot 3 - 2 = 16$. Da die Determinante des linearen Gleichungssystems verschieden von 0 ist, kann man t, v, u mit Hilfe der Cramerschen Regel berechnen. Wegen

   $$D_t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 8, \quad D_u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8, \quad D_v = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 8.$$

   Man erhält somit $t = \frac{D_t}{D} = \frac{8}{16} = 0,5; u = \frac{D_u}{D} = \frac{-8}{16} = 0,5; v = \frac{D_v}{D} = \frac{8}{16} = 0,5$.
   Da φ additiv und homogen ist, folgt aus $t\vec{a}_1 + u\vec{a}_2 + v\vec{a}_3 = \vec{a}_4$ die Gültigkeit der Gleichung

   $$t\varphi(\vec{a}_1) + u\varphi(\vec{a}_2) + v\varphi(\vec{a}_3) = \varphi(\vec{a}_4), \quad \text{also} \quad t\vec{d_1} + u\vec{d_2} + v\vec{d_3} = \vec{d_4}.$$

   Einsetzen der für t, u, v errechneten Werte ergibt

   $$0,5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} - 0,5 \begin{pmatrix} q \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ r \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also } p = -4, q = 3, r = 1, s = 1.$$

Für die weiteren Teile dieser Aufgabe sei nun φ die lineare Abbildung von R^3 nach R^4 mit der Matrix

$$M_\varphi = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 20 & -32 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Begründe, warum eine lineare Abbildung von R^3 nach R^4 nie surjektiv sein kann, und gib speziell einen Vektor aus R^4 an, der nicht zu Bild(φ) gehört.

   Lösung: Da R^3 die Dimension 3 hat, ist nach dem Dimensionssatz $\text{rg}(\varphi) = 3 - \text{def}(\varphi)$, also höchstens 3. Für eine surjektive Abbildung φ nach R^4 müsste aber $\text{Bild}(\varphi) = R^4$ (mit Dimension 4) gelten, die Abbildung also den Rang 4 haben. Somit kann φ nicht surjektiv sein.

   Da die Spalten-Vektoren in der Matrix ein Erzeugendensystem von Bild(φ) bilden, ist ein Vektor anzugeben, der sich nicht als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen läßt. Ein geeigneter Vektor ist der erste Vektor der kanonischen Basis $\vec{e}_1$. Denn läge dieser Vektor im Bildraum, wäre er als Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix von φ darstellbar; es müssten für geeignete Koeffizienten r, s, t die folgenden Gleichungen gelten:

   $$3r + t = 4, \quad 7r - 6s - t = 0, \quad 3r - 4s + t = 0 \quad \text{und} \quad 20r - 32s - 4t = 0.$$

   Aus der ersten und dritten Gleichung folgt $s = 0$. Hiermit erhält man aus den beiden letzten Gleichungen $4t = -12r$ und $4t = 20r$, also müssen auch r und t beide den Wert 0 haben. Für $r = s = t = 0$ ist aber die erste Gleichung offenbar nicht erfüllt.

   Der Einheitsvektor $\vec{e}_1$ liegt also nicht im Bildraum der Abbildung.

4. Beweise, dass die Abbildung φ injektiv ist.

   Lösung: Aufgrund des Dimensionssatzes genügt der Nachweis, daß der Bildraum die Dimension 3 hat, denn dann ist der Defekt der Abbildung $\dim(R^3) - 3$, also 0, und die Abbildung somit injektiv. Die drei Spaltenvektoren in der Matrix von φ sind linear unabhängig, da bereits die durch Streichen der letzten Matrixzeile entstehenden und vervierfachten Spaltenvektoren linear unabhängig sind, weil sich ihr Spatprodukt als verschieden von null erweist :

   $$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6 - 4) + 7 \cdot (-4) + 3 \cdot 6 = -40 \neq 0.$$

7.8.2 Aufgabe 2

Es sei φ eine lineare Abbildung eines Vektorraums V in einen Vektorraum W, $\vec{d}$ sei ein Vektor aus W.

1. Mit L wird die Menge aller Urbilder von $\vec{d}$ bezeichnet, also $L = \{\vec{x} \in V | \varphi(x) = \vec{d}\}$. Wenn $\vec{d}$ speziell der Nullvektor in W ist, ist L bekanntlich ein Vektorraum - nämlich der Kern K von φ . Es sei weiterhin vorausgesetzt, daß der Vektor $\vec{a}$ zu L gehört. Beweise, daß genau dann ein Vektor $\vec{x} \in V$ zu L gehört, wenn $\vec{x} - \vec{a}$ in K liegt.

   Lösung: Für jeden Vektor $\vec{x} \in V$ gilt:

   $$\vec{x} \in L \Longleftrightarrow \varphi(\vec{x}) = \vec{d} \Longleftrightarrow \varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{a}) \Longleftrightarrow \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{a}) = \vec{o} \Longleftrightarrow \varphi(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{o} \Longleftrightarrow \vec{x} - \vec{a} \in \text{Kern}(\varphi).$$

2. Weise für die folgenden Abbildungen φ_1 und φ_2 nach, daß sie linear sind, und bestimme jeweils die Matrix und den Kern der Abbildung sowie die Menge L für den jeweils angegebenen Vektor $\vec{d}$; $\vec{b}$ ist dabei der Vektor aus R^3 mit den Komponenten 1, -1 und 2.

   $$\varphi_1(\vec{x}) = \vec{b} * \vec{x}, \quad \vec{d} = (2); \qquad \varphi_2(\vec{x}) = \vec{b} \times \vec{x}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Lösung: Nach den Rechenregeln für das Skalarprodukt gilt für $r \in R$ und $\vec{a}, \vec{c} \in R^3$:

   $$\varphi_1(\vec{a} + r\vec{c}) = \vec{b} * (\vec{a} + r\vec{c}) = \vec{b} * \vec{a} + r(\vec{b} * \vec{c}) = \varphi_1(\vec{a}) + r\varphi_1(\vec{c});$$

   φ_1 ist also linear. Als Bilder der Einheitsvektoren erhält man $\varphi_1(\vec{e}_1) = 1, \varphi_1(\vec{e}_2) = -1, \varphi_1(\vec{e}_3) = 2$.

   Die Matrix von φ_1 ist also M_{φ_1}= (1 -1 2).

Der Kern der Abbildung φ_1 besteht aus allen Vektoren, die zu $\vec{b}$ orthogonal sind; als Basisvektoren wählt man zum Beispiel

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \vec{c}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}; \quad \text{Kern}(\varphi_1) = \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2 \rangle.$$

Als speziellen Vektor aus L kann man z.B. $\vec{e}_3$ wählen, denn $\vec{b} * \vec{e}_3 = 2$. L ist somit die Menge aller Vektoren des Raums R^3, die sich mit reellen Parametern r, s in der Form $\vec{e}_3 + r\vec{c}_1 + s\vec{c}_2$ darstellen lassen.

Nach den Rechenregeln für das Kreuzprodukt gilt für $r \in R$ und $\vec{a}, \vec{c} \in R^3$:
$\varphi_2(\vec{a} + r\vec{c}) = \vec{b} \times (\vec{a} + r\vec{c}) = \vec{b} \times \vec{a} + r(\vec{b} \times \vec{c}) = \varphi_2(\vec{a}) + r\varphi_2(\vec{c})$; φ_2 ist also linear.

$$\varphi_2(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}; \varphi_2(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix};$$
$$\varphi_2(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}; \qquad M_{\varphi_2} = \begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\2 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Der Kern von φ_2 besteht aus allen Vektoren des Raums R^3, die mit $\vec{b}$ das Kreuzprodukt $\vec{o}$ liefern, also Vielfache von $\vec{b}$ sind. Der gesuchte Kern ist somit die lineare Hülle von $\vec{b}$: $\text{Kern}(\varphi_2) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$.

Als Kreuzprodukt von $\vec{b}$ mit $\vec{e}_1$ ergibt sich $\vec{d}$; $\vec{e}_1$ ist daher ein spezielles Element von L. Somit erhält man L als Menge aller Vektoren, die sich mit einem reellen Parameter r in der Form $\vec{e}_1 + r\vec{b}$ darstellen lassen.

7.8.3 Aufgabe 3

Eine lineare Abbildung φ eines euklidischen Vektorraums V in sich heißt *symmetrisch*, wenn für alle $\vec{a}, \vec{b}$ aus V die Gleichung $\varphi(\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * \varphi(\vec{b})$ erfüllt ist.

1. Für eine symmetrische lineare Abbildung φ sei $\vec{a}$ aus Kern(φ), $\vec{b}$ aus Bild(φ). Zeige, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ orthogonal sind.

   Lösung: Da $\vec{b}$ im Bildraum der Abbildung liegt, gibt es einen Vektor $\vec{c}$ in V, der Urbild von $\vec{b}$ ist. Somit hat man:

   $$\vec{a} * \vec{b} = \vec{a} * \varphi(\vec{c}) = \varphi(\vec{a}) * \vec{c} = \vec{o} * \vec{c} = 0;$$

   also sind $\vec{a}, \vec{b}$ orthogonal.

2. Speziell sei $V = R^3$. Jede lineare Abbildung φ von V in sich kann dann durch eine Matrix A mit Komponenten a_{ij} beschrieben werden. Von diesen Komponenten sei bekannt, dass für alle Indexpaare (i,j) die Gleichung $a_{ij} = a_{ji}$ erfüllt ist. Weise nach, dass φ symmetrisch ist.

   Lösung: Es sei $\vec{a}$ ein Vektor aus R^3 mit den Komponenten a_1, a_2, a_3; entsprechend habe $\vec{b}$ die Komponenten b_1, b_2, b_3.

   $$\begin{aligned}\varphi(\vec{a}) * \vec{b} &= \textstyle\sum_{i=1}^3 (a_{1i}a_i) \cdot b_1 + \sum_{i=1}^3 (a_{2i}a_i) \cdot b_2 + \sum_{i=1}^3 (a_{3i}a_i) \cdot b_3\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^3 (a_{i1}a_i) \cdot b_1 + \sum_{i=1}^3 (a_{i2}a_i) \cdot b_2 + \sum_{i=1}^3 (a_{i3}a_i) \cdot b_3\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^3 (a_{1i}b_i) \cdot a_1 + \sum_{i=1}^3 (a_{2i}b_i) \cdot a_2 + \sum_{i=1}^3 (a_{3i}b_i) \cdot a_3\\ &= \varphi(\vec{b}) * \vec{a} = \vec{a} * \varphi(\vec{b}).\end{aligned}$$

3. Noch spezieller sei φ nun durch die folgende Matrix A gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme Kern und Bild von φ.

Bestätige für die Ergebnisse die Aussage von Aufgabenteil 1.

Lösung: Der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ hat als Bild den Vektor $\begin{pmatrix} x-y+z \\ -x+2y \\ x+2z \end{pmatrix}$. Damit als Bild der Nullvektor herauskommt, muß gemäß den letzten beiden Komponenten gelten $y = 0,5x$ und $z = -0,5x$. Einsetzen in die erste Komponente des Bildvektors zeigt, daß dies auch hinreichend ist. Somit besteht Kern der Abbildung aus allen Vektoren der Form $\begin{pmatrix} x \\ 0.5x \\ -0.5x \end{pmatrix}$ mit $x \in R$. Man hat also: $\text{Kern}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Da der Defekt der Abbildung 1 beträgt, hat nach dem Dimensionssatz der Bildraum die Dimension 2; da die ersten beiden Spalten der Matrix offensichtlich linear unabhängig sind, hat man: $\text{Bild}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Für das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{a}$ aus Kern(φ) und eines Vektors $\vec{b}$ aus Bild(φ) ergibt sich

$$\vec{a} * \vec{b} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = (2-1-1)rs + (-2+2)rt = 0.$$

Die Orthogonalitätsaussage aus der ersten Teilaufgabe wird also bestätigt.

4. Wenn für eine beliebige symmetrische lineare Abbildung φ eines euklidischen Vektorraums V in sich für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ die beiden Gleichungen $\varphi(\vec{a}) = 2\vec{a}$ und $\varphi(\vec{b}) = 3\vec{b}$ gelten, so sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal. Das ist zu beweisen.

Lösung: $\quad \vec{a} * \vec{b} = 3\vec{a} * \vec{b} - 2\vec{a} * \vec{b} = \vec{a} * 3\vec{b} - 2\vec{a} * \vec{b} = \vec{a} * \varphi(\vec{b}) - \varphi(\vec{a}) * \vec{b} = 0.$

7.9 Klausur 13.2.1 - unter Abiturbedingungen

7.9.1 Aufgabe 1

Durch die Gleichung $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ ist eine rationale Funktion gegeben.

1. Führe eine Kurvendiskussion durch und skizziere die Kurve.

Lösung: Die Argumentmenge von f ist $A = R\backslash\{-2\}$. Da der Zähler in einer Umgebung der Definitionslücke -2 negativ ist und der Nenner bei -2 von negativ zu positiv wechselt, hat der Graph hier einen Pol mit plus/minus-Vorzeichenwechsel .

Einzige Nullstelle der Funktion ist $-\frac{1}{2}$. Da eine stetige Funktion innerhalb der Argumentmenge das Vorzeichen nur bei Nullstellen wechseln kann, ergibt sich wegen $f(0) = \frac{1}{2}$, dass der Graph über $]-2; -\frac{1}{2}[$ unterhalb und sonst (außer in seinem Nullpunkt) oberhalb der x-Achse verläuft.

Durch Polynomdivision erhält man $f(x) = 2 - \frac{3}{x+2}$. Für betraglich großes x strebt $f(x)$ daher gegen 2, und zwar im negativen Bereich von oben, im positiven Bereich von unten.

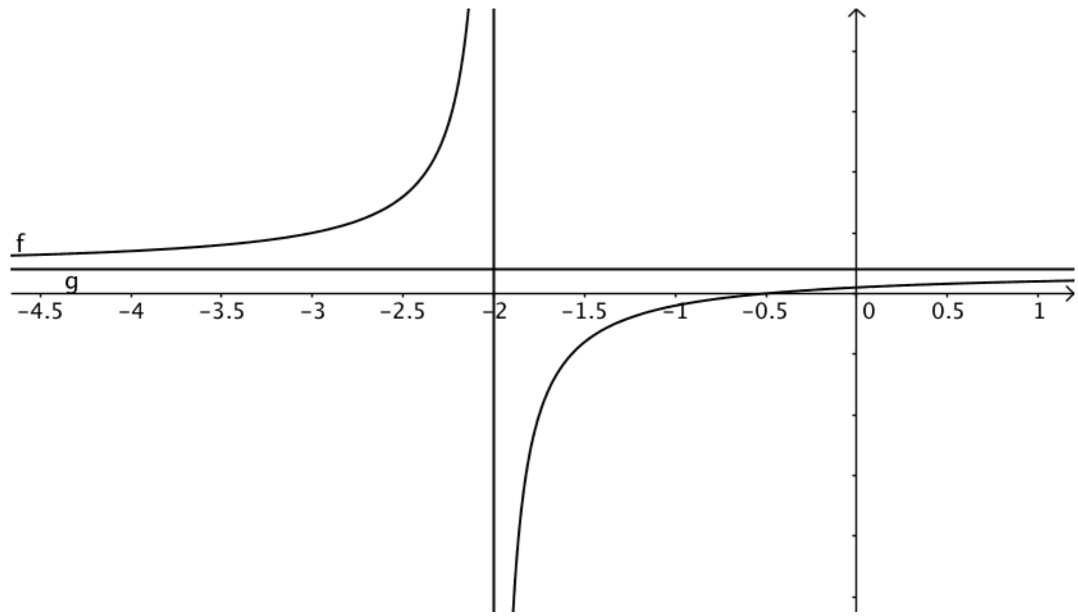
Als rationale Funktion ist f über seiner Argumentmenge unendlich oft differenzierbar. Die ersten beiden Ableitungen sind

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{(x+2)^2}, \qquad f''(x) = -6 \cdot \frac{1}{(x+2)^3}.$$

Offensichtlich hat f' nur positive Werte; nach dem globalen Wachstumssatz ist f also über jedem Intervall der Argumentmenge streng isoton. Da die Argumentmenge nur aus inneren Punkten besteht, kann f keine relativen Extrema haben.

Die zweite Ableitung der Funktion ist links von -2 positiv, rechts von -2 negativ, also verläuft der Graph von f links von -2 linksdrehend, rechts von -2 rechtsdrehend.

Wegen $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$ lässt sich der Kurvenverlauf zusammenfassend so beschreiben: Der Graph hat als schiefe Asymptote die Gerade g mit der Gleichung $y = 2$; von $-\infty$ kommend entfernt sich der Graph steigend von ihr, wobei er bis zur Polstelle -2 eine Linksdrehung beschreibt. Nach dem Vorzeichenwechsel beim Pol kommt er rechtsdrehend steigend von $-\infty$, schneidet bei $x = -\frac{1}{2}$ mit der Steigung $\frac{4}{3}$ die x-Achse und steigt weiter rechtsdrehend, wobei er sich von unten der Asymptote g nähert.



2. Bestimme das Schmiegepolynom s_2 zu f.

   Kontrolle: $s_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}x^2$

   Lösung: Das zweite Schmiegepolynom $s_2(x)$ hat die Form $s_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$; dabei ist $a_i = \frac{f^i(0)}{i!}$ für i=0, 1, 2. s_2 ist dadurch festgelegt, dass es im Funktionswert und den ersten beiden Ableitungen an der Stelle 0 mit f übereinstimmt.

   Wegen $f(0) = \frac{1}{2}$, $\quad f'(0) = \frac{3}{4}$, $\quad f''(0) = -\frac{3}{4}$ erhält man die Koeffizienten $a_0 = \frac{1}{2}$, $\quad a_1 = \frac{3}{4}$, $\quad a_2 = -\frac{3}{8}$, also $s_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}x^2$.

3. Beweise, dass s_2 über dem Intervall [0; 1] an keiner Stelle einen größeren Wert als f annimmt.

   Lösung:

$$8 \cdot (s_2 - f)(x) = (4 + 6x - 3x^2) \cdot (x + 2) - 8 \cdot (2x + 1) = -3x^3 + 16x + 8 - 16x - 8 = -3x^3$$

   Die einzige Nullstelle von $s_3 - f$ liegt bei 0; als stetige Funktion hat $s_2 - f$ daher rechts von 0 keinen Vorzeichenwechsel. Wegen $(s_2 - f)(1) = \frac{7}{8} - 1 < 0$ hat s_2 daher an keiner Stelle des Intervalls [0; 1] einen größeren Wert als f.

   Alternativlösung: Wegen $f'''(x) = 18 \cdot \frac{1}{(x+2)^4}$ sichert der Satz von Taylor für jedes positive x die Existenz eines positiven ξ mit $f(x) - s_2(x) = \frac{1}{3!} \cdot 18 \cdot \frac{1}{(\xi+2)^4} \cdot x^4$; also gilt $f(x) > s_2(x)$ für jedes positive x.

4. Man benutzt nun s_2 über [0; 1] als Näherungsfunktion zu f. Weise nach, dass der Fehler überall kleiner als $\frac{1}{5}$ ist.

Lösung: Nach der vorhergehenden Teilaufgabe gilt für $x \in [0;1]$

$$0 \leq f(x) - s_2(x) = \frac{3x^2}{8 \cdot (x+2)} \leq \frac{3}{16} < \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Alternativlösung (mit Satz von Taylor):

$$0 \leq f(x) - s_3(x) = \frac{1}{3!} \cdot 18 \cdot \frac{1}{(\xi+2)^4} \cdot x^4 \leq \frac{3}{16} < \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

5. Berechne den mittleren absoluten Fehler.

   Lösung: Da das betrachtete Intervall die Länge 1 hat, und die Differenzfunktion $f - s_2$ dort nirgends negativ ist, ergibt sich der gesuchte Mittelwert μ als $\int_0^1 (f(x) - s_2(x))dx$.

$$\mu = \int_0^1 (2 - \frac{3}{x+2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}x^2)dx = \int_0^1 (\frac{3}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{x+2})dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - 3 \cdot \ln(x+2)\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8} - 3 \cdot \ln(3) + 3 \cdot \ln(2) = \frac{5}{4} + \ln(\frac{2}{3})$$

   Der mittlere absolute Fehler beträgt $\frac{5}{4} + \ln(\frac{2}{3})$, also ca. 0,034.

7.9.2 Aufgabe 2

Der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Differentialrechnung lautet:
Sind f und g stetige Funktionen auf einem Intervall [a; b] , differenzierbar im Inneren des Intervalls, und ist $g'(x)$ für alle $x \in$]a; b[positiv, so gibt es eine Stelle $\xi \in$]a; b[, so dass gilt: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

1. Ein Schüler „beweist“ den Satz so: Nach dem Mittelwertsatz (angewendet auf die Funktion f) gibt es ein $\xi \in$]a; b[mit $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$; entsprechend liefert die Anwendung des Satzes auf die Funktion g: $g(b) - g(a) = g'(\xi) \cdot (b-a)$. Zusammenfassen der beiden Gleichungen liefert die Behauptung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Erläutere, inwiefern dieser Beweis fehlerhaft ist.

   Lösung: Die von dem Schüler gleichermaßen mit ξ bezeichneten Stellen sind für die verschiedenen Funktionen f und g im allgmeinen verschiedene Werte ξ_1 und ξ_2, die hier unzulässigerweise gleichgesetzt wurden.

2. Beweise den verallgemeinerten Mittelwertsatz unter Benutzung der auf [a; b] definierten Hilfsfunktion h mit

$$h(x) := f(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g(x) \cdot (f(b) - f(a)) + f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b) \ .$$

   Hinweis: Verwende den Satz von Rolle.

   Lösung: Da f und g nach Voraussetzung auf [a; b], stetige, im Inneren des Intervalls differenzierbare Funktionen sind, hat h als Linearkombination von f und g diese Eigenschaften. Wenn also zusätzlich noch $h(a) = h(b) = 0$ gilt, erfüllt h die Voraussetzungen des Satzes von Rolle.

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) \cdot (g(b) - g(a)) - g(a) \cdot (f(b) - f(a)) + f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b) = 0, \\ h(b) &= f(b) \cdot (g(b) - g(a)) - g(b) \cdot (f(b) - f(a)) + f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b) = 0. \end{aligned}$$

   Nach dem Satz von Rolle gibt es also ein $\xi \in]a; b[$ mit $h'(\xi) = 0$. Als Ableitung von h bei ξ erhält man $h'(\xi) = f'(\xi) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(\xi) \cdot (f(b) - f(a))$. Somit hat man $f'(\xi) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(\xi) \cdot (f(b) - f(a))$.

   Da g' nach Voraussetzung über]a; b[positiv ist, ist nach dem globalen Wachstumssatz die bei a und b stetige Funktion g über]a; b[streng isoton, insbesondere ist $g(b) - g(a)$ positiv, also verschieden von 0. Die somit erlaubte Division durch $g'(\xi) \cdot (g(b) - g(a))$ liefert die behauptete Gleichung $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

3. Für über [-1; 1] differenzierbare Funktionen f, g sei bekannt: $f(0) = g(0) = 0$. Der Grenzwert von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ für x gegen 0 existiere und betrage λ.

   Beweise (unter Verwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes), dass dann bei 0 auch der Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ existiert und den Wert λ hat.

   Lösung: Eine positive Zahl ε sei vorgegeben. Da $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ für x gegen 0 gegen den Grenzwert λ konvergiert, gibt es eine Umgebung von 0, über der für alle von 0 verschiedenen Werte x gilt: $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \lambda\right| < \varepsilon$.

   Für jedes von 0 verschiedene x aus dieser Umgebung gibt es nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ein ξ aus dieser Umgebung, so dass die folgende Gleichung gilt:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| = \left|\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} - \lambda\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda\right| < \varepsilon.$$

   Zu jedem positiven ε gibt es also eine Umgebung von 0, über der für alle von 0 verschiedenen Werte von x der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ in der ε-Umgebung von λ liegt. Das ist aber gerade die behauptete Konvergenzeigenschaft.

4. Berechne $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

   Lösung: Getrenntes Ableiten von Zähler- und Nennerfunktion liefert den Term $\frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$. Der zweite Faktor ist der Differenzenquotient der Exponentialfunktion für die Stelle 0, strebt also gegen exp'(0), also gegen 1, wenn x gegen 0 strebt.

   Da Zähler und Nenner des gegebenen Terms beide differenzierbar sind und bei 0 den Wert 0 annehmen, lässt sich die Regel aus dem vorhergehenden Aufgabenteil anwenden. Die durch den Term $\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ gegebene Funktion hat somit bei 0 den Grenzwert $\frac{1}{2}$.

   Bemerkung: Anstatt die Kenntnis über den Differenzenquotienten einzusetzen, kann man auch die Regel aus dem vorhergehenden Teil noch einmal anwenden; erneutes Ableiten von Zähler- und Nennerfunktion liefert nämlich $\frac{e^x}{2}$ mit Grenzwert $\frac{1}{2}$ bei 0.

7.9.3 Aufgabe 3

Eine lineare Abbildung φ eines normierten Vektorraums V in sich heißt *kontrahierend*, wenn es eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$ gibt, für welche gilt: Für alle $\vec{a}, \vec{b}$ aus V ist $\|\varphi(\vec{a}) - \varphi(\vec{b})\| \leq q \cdot \|\vec{a} - \vec{b}\|$.

1. Erkläre die Bedeutung von φ *ist stetig bei* $\vec{a}$ und von $\vec{a}$ *ist Fixpunkt von* φ, und weise nach, dass jede kontrahierende Abbildung φ stetig ist und höchstens einen Fixpunkt hat.

   Lösung: φ heißt stetig bei $\vec{a}$, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine positive reelle Zahl δ gibt, so dass für alle Vektoren $\vec{x}$ des Vektorraumes V mit $\|\vec{a} - \vec{x}\| < \delta$ gilt: $\|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{a})\| < \varepsilon$.

   Ein Vektor $\vec{a}$ heißt Fixpunkt von φ, wenn $\varphi(\vec{a}) = \vec{a}$ gilt.

   Zu $\vec{a} \in V$ und zu vorgegebenem positiven ε setze man $\delta := \varepsilon$. Für jeden Vektor $\vec{x}$ aus V mit $\|\vec{a} - \vec{x}\| < \delta$ gilt dann

$$\|\varphi(\vec{a}) - \varphi(\vec{x})\| \leq q \cdot \|\vec{a} - \vec{x}\| < q \cdot \delta = q \cdot \varepsilon < \varepsilon.$$

   φ ist also bei $\vec{a}$ - und wegen der Beliebigkeit von $\vec{a} \in V$ - auf ganz V stetig.

   Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Fixpunkte der kontrahierenden Abbildung φ sind, dann gibt es ein q aus]0,1[mit

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\varphi(\vec{a}) - \varphi(\vec{b})\| \leq q \cdot \|\vec{a} - \vec{b}\|, \quad \text{also } 0 \leq (q - 1) \cdot \|\vec{a} - \vec{b}\|.$$

   Da $q - 1$ negativ ist und $\|\vec{a} - \vec{b}\|$ nicht negativ sein kann, folgt $\|\vec{a} - \vec{b}\| = 0$, also $\vec{a} = \vec{b}$; es kann daher höchstens einen Fixpunkt geben.

2. φ sei eine kontrahierende Abbildung von V in sich mit dem Fixpunkt $\vec{c}$.

   Durch die rekursive Definition $\vec{d_1} := \vec{o}$, und $\vec{d}_{n+1} := \varphi(\vec{d_n})$ für alle $n \in N$ wird eine Folge $\langle \vec{d_n} \rangle$ erklärt. Beweise, dass diese Folge gegen $\vec{c}$ konvergiert.

   Hinweis: Zeige zunächst, dass für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung $\|\vec{d_n} - \vec{c}\| \leq q^{n-1} \cdot \|\vec{c}\|$ gilt.

   Lösung: Zunächst wird durch vollständige Induktion die im Hinweis angegebene Ungleichung bewiesen.

   Für $n = 1$ ergibt sich die Behauptung $\|\vec{d_1} - \vec{c}\| \leq q^0 \cdot \|\vec{c}\|$, also $\|\vec{c}\| \leq 1 \cdot \|\vec{c}\|$; das ist offensichtlich richtig.

   Es sei nun $n \in N$ und vorausgesetzt $\|\vec{d_n} - \vec{c}\| \leq q^{n-1} \cdot \|\vec{c}\|$. Dann erhält man gemäß der Definition der Folge unter Ausnutzung der Fixpunkteigenschaft von $\vec{c}$ die folgende Ungleichungskette:

$$\|\vec{d}_{n+1} - \vec{c}\| = \|\varphi(\vec{d_n}) - \varphi(\vec{c})\| \leq q \cdot \|\vec{d_n} - \vec{c}\| \leq q \cdot q^{n-1} \cdot \|\vec{c}\| = q^n \cdot \|\vec{c}\|.$$

   Damit ist die im Hinweis angegebene Ungleichung für alle natürlichen Zahlen n bewiesen. Da die Folge der Potenzen von q für $q \in]0, 1[$ eine Nullfolge ist, muss nach dem Majorantensatz auch die betraglich nicht größere Folge mit dem allgemeinen Glied $\|\vec{d_n} - \vec{c}\|$ gegen 0 konvergieren; das bedeutet aber gerade, dass $\vec{c}$ der Grenzwert der Folge $\langle \vec{d_n} \rangle$ ist.

   Für die folgenden Aufgabenteile sei speziell $V = R^3$. Durch die Gleichung

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

   wird eine Abbildung von V in sich erklärt.

3. Weise nach, dass die Abbildung φ kontrahierend ist.

   Lösung: Die Matrix der Aufgabenstellung sei mit A abgekürzt, weiter sei $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} := \vec{d}$.

   Es ist nun nachzuweisen, dass es eine positive Zahl q ($q < 1$) gibt, so dass für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aus R^3 die Ungleichung $\|\varphi(\vec{a}) - \varphi(\vec{b})\| \leq q \cdot \|\vec{a} - \vec{b}\|$ erfüllt ist. Wegen $\varphi(\vec{a}) - \varphi(\vec{b}) = \frac{1}{7}A \cdot \vec{a} - \frac{1}{7}A \cdot \vec{b} = \frac{1}{7}A(\vec{a} - \vec{b})$ genügt es, ein geeignetes $q \in]0, 1[$ zu finden, so dass für alle $\vec{x} \in R^3$ die Ungleichung $\|A\vec{x}\| < q \cdot 7 \cdot \|\vec{x}\|$ gilt.

$$\|A\vec{x}\|^2 = (x + y - z)^2 + (-x + y + z)^2 + (x + 2z)^2 = 3x^2 + 2y^2 + 6z^2 \leq 9(x^2 + y^2 + z^2) = 9 \cdot \|\vec{x}\|^2$$

   Somit gilt $\|A(\vec{x})\| \leq 3 \cdot \|x\|$, also $\|\frac{1}{7}A\vec{x}\| \leq \frac{3}{7} \cdot \|x\|$.

   Mit $q = \frac{3}{7}$ ist also ein geeigneter Wert q gefunden worden; die Abbildung ist daher kontrahierend.

4. Bestimme - gemäß der Definition im zweiten Aufgabenteil - die Vektoren $\vec{d_2}$ und $\vec{d_3}$.

   Lösung: Mit den Bezeichnungen A und $\vec{d}$ gemäß dem vorhergehenden Aufgabenteil hat man:

$$\vec{d_2} = \frac{1}{7}A \cdot \vec{o} + \vec{d} = \vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$\vec{d_3} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + \vec{d} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 54 \\ -7 \\ 89 \end{pmatrix}$$

5. Berechne den Fixpunkt von φ durch Aufstellen und Lösen eines der Fixpunktdefinition entsprechenden Gleichungssystems.

Lösung: Gemäß der Fixpunktdefinition ist die folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{also} \begin{pmatrix} 7x \\ 7y \\ 7z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 56 \\ -7 \\ 63 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassen führt zum vektoriell dargestellten linearen (3,3)-Gleichungssystem mit der folgenden erweiterten Koeffiezientenmatrix B:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & | & 56 \\ 1 & 6 & -1 & | & -7 \\ -1 & 0 & 5 & | & 63 \end{pmatrix}$$

Durch elementare Zeilenumformungen der Matrix B erhält man nacheinander

$$B \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 31 & | & 434 \\ 0 & 6 & 4 & | & 56 \\ 1 & 0 & -5 & | & -63 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 31 & | & 434 \\ 0 & 0 & 190 & | & 2660 \\ 1 & 0 & -5 & | & -63 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 31 & | & 434 \\ 0 & 0 & 1 & | & 14 \\ 1 & 0 & -5 & | & -63 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 14 \\ 1 & 0 & 0 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 14 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$\vec{c}$ ist der gesuchte Fixpunkt.

7.10 Abiturklausur

7.10.1 Aufgabe 1

Die rationale Funktion f hat die Gleichung $f(x) = 4 \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x+2}$.

1. Gib die umfassendste Argumentmenge A an, ermittle Nullstellen, Monotonieeigenschaften und Asymptoten, und skizziere den Verlauf des Graphen von f.

   Lösung: Nullstellen einer rationalen Funktion sind die Nullstellen des Zählers (soweit im Definitionsbereich), also -1 und 2. Definitionslücken sind die Nullstellen des Nenners, also -2, somit ist die Argumentmenge $A = R \setminus \{-2\}$. Da f als rationale Funktion stetig ist, sind Vorzeichenwechsel nur bei -2, -1 und 2 möglich. Durch Ausmultiplizieren des Zählers und Ableiten erhält man

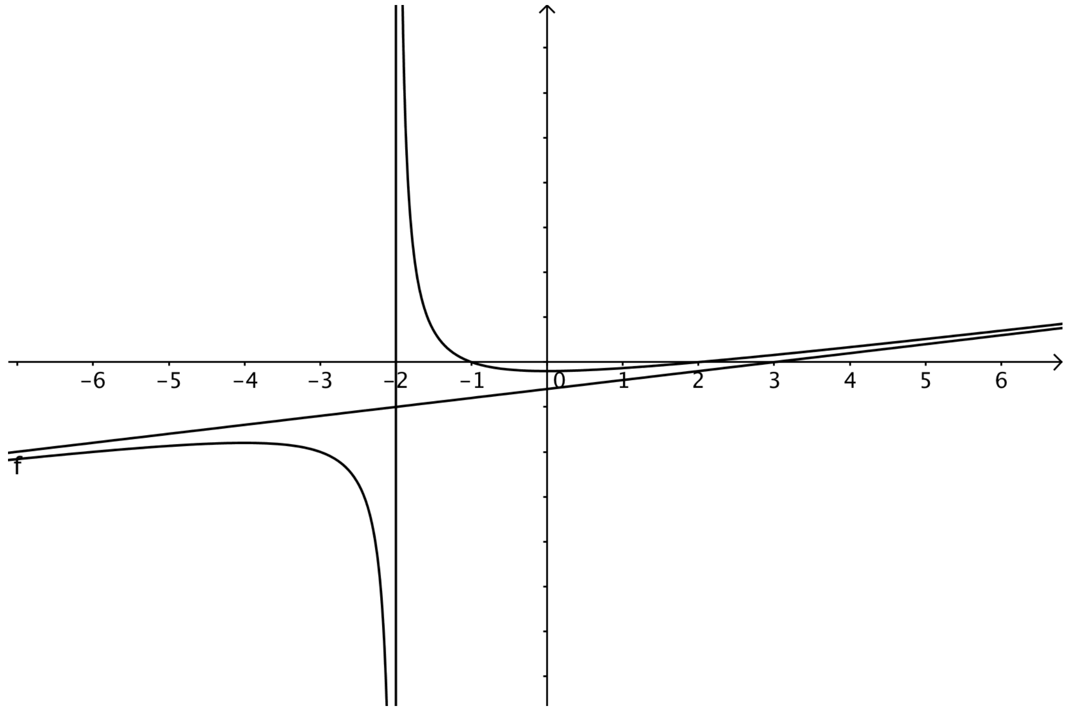
   $$f(x) = 4 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x+2}; \qquad f'(x) = 4 \cdot \frac{(x+2)(2x-1) - (x^2 - x - 2)}{(x+2)^2} = 4x \cdot \frac{x+4}{(x+2)^2}$$

   f' hat also seine Nullstellen bei -4 und 0, kann somit sein Vorzeichen höchstens bei -4, -2 und 0 wechseln. Wegen $f'(-5) > 0 > f'(-3)$ und $f'(-1) < 0 < f'(1)$ ist f nach dem globalen Wachstumssatz über $]-\infty; -4[$ isoton, über $]-4; -2[$ und über $]-2; 0[$ antiton, und über $]0; \infty[$ wieder isoton.

   Insbesondere sieht man, dass an der Stelle der senkrechten Asymptote (bei -2) ein Vorzeichenwechsel von minus nach plus stattfindet. Aus dem Monotonieverhalten und aus den Nullstellen von f und f' ergeben sich die Vorzeichenbereiche, die in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst sind.

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0		2		∞
f(x)			<0		|	>0	|		<0		|	>0	
f'(x)		>0	|	<0	|		<0		|		>0		

   Polynomdivision liefert $f(x) = 4 \cdot (x-3) + \frac{16}{x+2}$. Die schiefe Asymptote des Graphen hat also die Gleichung $y = 4x - 1$. Da der Term $x + 2$ für $x < -2$ negativ und für $x > -2$ positiv ist, verläuft der Graph der Funktion f links von der senkrechten Asymptote unterhalb, rechts von ihr oberhalb der schiefen Asymptote. Damit ergibt sich der nachfolgend skizzierte Kurvenverlauf:



2. Bestimme den Funktionsterm $p(x)$ der Parabel dritter Ordnung, die den Graphen von f in seinen Nullpunkten berührt.

   Lösung: Die Nullstellen von f sind -1 und 2, die Ableitungen an den Nullstellen sind $f'(-1) = -12$ und $f'(2) = 3$.

   Ein Polynom 3. Grades $p(x)$ hat die Gleichung $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, also $p'(x) = b + 2cx + 3dx^2$. Für die Koeffizienten a, b, c, d ergeben sich daher die folgenden vier Bedingungen:

$$a - b + c - d = 0 \quad \wedge \quad a + 2b + 4c + 8d = 0 \quad \wedge \quad b - 2c + 3d = -12 \quad \wedge \quad b + 4c + 12d = 3$$

   Dieses lineare (4;4)-Gleichungssystem wird nachfolgend durch zulässige Umformungen der zugehörigen erweiterten Koeffizientenmatrix gelöst:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & -12 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & -12 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & -12 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & | & -12 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Das gesuchte Polynom ist also $p(x) = -6 - x + 4x^2 - x^3$.

3. Weise nach, dass im Intervall zwischen den Nullpunkten des Graphen von f die Parabel an keiner Stelle oberhalb von Graph(f) verläuft.

Lösung: Nach Konstruktion hat p bei -1 und 2 Nullstellen, $p(x)$ enthält also die Faktoren $x+1$ und $x-2$. Polynomdivision liefert damit $p(x) = (x+1)(x-2)(3-x)$. Daher hat man

$$f(x) - p(x) = 4 \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x+2} - (x-2)(x+1)(3-x) = (x-2)(x+1)\left(\frac{4}{x+2} + x - 3\right)$$

$$= (x-2)(x+1) \cdot \frac{4 + (x-3)(x+2)}{x+2} = (x-2)(x+1) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x+2} = \frac{(x-2)^2(x+1)^2}{x+2}$$

Da dieser Ausdruck für $x \neq -2, \neq 1$ verschieden von 0 ist, wechselt $f-p$ über]-2;1[nicht das Vorzeichen, ist dort also wegen $(f-p)(0) = 2$ positiv. Somit verläuft der Graph von p über dem Intervall [-2;1] nirgends oberhalb des Graphen von f.

4. Berechne den Inhalt des von den beiden Kurven umrandeten Flächenstücks.

   Lösung: Der Inhalt A der Fläche zwischen dem oberen Graphen (von f) und dem unteren Graphen (von p) ist $A = \int_{-2}^{1}(f(x) - p(x))dx$.

$$A = \int_{-1}^{2} \left(4(x-3) + \frac{16}{x+2} + 6 + x - 4x^2 + x^3\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(x^3 - 4x^2 + 5x - 6 + \frac{16}{x+2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + 16\ln(x+2)\right]_{-1}^{2} = \ln(4) - \frac{75}{4} \approx 3,4307.$$

7.10.2 Aufgabe 2

Gegeben sind die vier Punkte A(1; -1; 0), B(2; 3; 1), C(5; 10; 3) und D(4; 4; -4).

1. Zeige, dass die Punkte A, B und C eine Ebene E festlegen, und berechne den Flächeninhalt von Dreieck ABC.

   Lösung: Es genügt, z.B. die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ $(= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix})$ und $\vec{c} - \vec{a}$ $(= \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix})$ zu zeigen. Offensichtlich sind die Komponenten dieser Vektoren nicht proportional, die Vektoren sind linear unabhängig.

   Aufgrund der geometrischen Bedeutung des Kreuzprodukts lässt sich der gesuchte Flächeninhalt errechnen als

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{27} = 1,5 \cdot \sqrt{3}$$

   Der gesuchte Flächeninhalt beträgt somit ca. 2,6 .

2. Gib eine Parameterdarstellung von E an, ermittle hiermit eine Koordinatengleichung für E und zeige durch Lösen der entsprechenden Gleichung mit drei Variablen, wie man aus der Gleichung wieder eine Parameterdarstellung gewinnen kann.

   Lösung: Eine Pd. von E ist $\vec{x} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$, also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Setzt man $\vec{l} := (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})$ $(= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix})$, ergibt skalare Multiplikation der Parametergleichung von E mit $\vec{l}$ die Gleichung $\vec{x} * \vec{l} = \vec{a} * \vec{l}$ und damit die gesuchte Koordinatengleichung der Ebene $x + y - 5z = 0$. Aus dem homogenen Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix (1 1 -5) liest man ab: Der Defekt der zugehörigen linearen Gleichung ist 2, zwei Basisvektoren des Kerns sind $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so dass mit $\vec{x} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wieder eine (allerdings andere) Parametergleichung der Ebene E erhalten wird.

3. Ermittle den Abstand des Punktes D von der Ebene E sowie das Volumen des Tetraeders ABCD.

   Lösung: Aus der Koordinatengleichung von E erhält man wegen $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{27}$ als Hesseform der Ebenengleichung $\frac{1}{\sqrt{27}}(x+y-5z) = 0$. Einsetzen der Koordinaten von D in die linke Seite dieser Gleichung liefert den Wert $d = \frac{28}{\sqrt{27}}$ ($\approx 5,39$) als Abstand von D zur Ebene E.

   Für das Tetraedervolumen $V = \frac{1}{3} \cdot |\Delta ABC| \cdot d$ ergibt sich daher $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{27} \cdot \frac{28}{\sqrt{27}} = \frac{14}{3}$ ($\approx 4,67$).

4. S sei der Schwerpunkt des Tetraeders, T entstehe durch Spiegelung von D an S. Bestimme die Koordinaten von S und T, bestätige, dass D und T in verschiedenen Halbräumen von E liegen und berechne die Koordinaten des Schnittpunktes P von DT mit E.

   Lösung: Der Schwerpunkt S des Tetraeders ABCD hat den Ortsvektor $\vec{s} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$.

   Somit ist S $= (\frac{1+2+5+4}{4}; \frac{-1+3+10+4}{4}; \frac{0+1+3-4}{4}) = (3; 4; 0)$.

   Einsetzen der Koordinaten von D bzw. T in die linke Seite der Koordinatengleichung von E liefert Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen, nämlich $4 + 4 + 20 > 0$ für D und $2 + 4 - 20 < 0$ für T. D und T liegen somit auf verschiedenen Seiten der Ebene.

   Die Strecke DT lässt sich durch die Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{d} + r(\vec{t} - \vec{d})$ beschreiben.

   Dies ergibt nach Einsetzen der Komponenten und Auflösen nach Koordinaten für x, y, z die Gleichungen $x = 4 - 2r, \quad y = 4, \quad z = -4 + 8r$, woraus man durch Einsetzen in die Ebenengleichung erhält:

   $(4 - 2r) + 4 + 20 - 40r = 0, \quad$ also $r = \frac{2}{3}$ und somit P $= (4 - 2 \cdot \frac{2}{3}; 4; -4 + 8 \cdot \frac{2}{3}) = (\frac{4}{3}; 4; \frac{8}{3})$.

7.10.3 Aufgabe 3

Für die reelle Zahl a sei φ_a die lineare Abbildung von R^3 in sich, die durch die folgende (3,3)-Matrix M_φ gegeben ist:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 2a \end{pmatrix}$$

1. Bestimme - mit geeigneten Fallunterscheidungen - den Kern von φ_a.

   Lösung:

   $$\det(M_\varphi) = 2a^2 - 6 + 2 - a^2 = a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$$

   Die Matrix M_φ wird also singulär für $a = -2$ und $a = 2$. Nach Einsetzen der Werte für a kann man nach elementaren Zeilenumformungen der Matrix eine Basis des Kerns ablesen:

   $$a = -2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad K_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

   $$a = 2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad K_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

   Dabei bezeichnet K_a den Kern der Abbildung φ_a. Für $a \in R \setminus \{-2; 2\}$ ist $K_a = \{\vec{o}\}$.

2. Gib für jeden der auftretenden Fälle eine Basis des Bildraums an.

   Lösung: Die ersten beiden Spalten der Matrix M_φ sind für jeden Wert von a linear unabhängig. Für $a = -2$ und $a = 2$ hat der Kern die Dimension 1, das Bild also die Dimension 3-1 = 2.

   Für alle anderen Werte von a ist die Matrix regulär, eine geeignete Basis also z.B. die kanonische Basis des Raumes R^3.

   Bezeichnet man für $a \in \{-2; 2\}$ den zum Parameter a gehörenden Bildraum mit B_a erhält man daher:

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}) \text{ ist eine Basis von} B_{-2}, \quad (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}) \text{ ist eine Basis von } B_2.$$

3. Bestimme alle Werte $a \in R$, für welche der folgende Vektor $\vec{d}$ im Bildraum liegt:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

   Lösung: Für $a^2 \neq 4$ liegt $\vec{d}$ im Bildraum, da der Bildraum ganz R^3 ist.

   Bezeichnet man für $a \in \{-2; 2\}$ mit p_a das Spatprodukt aus $\vec{d}$ und den beiden jeweils angegeben Basisvektoren von B_a, erhält man

$$p_{-2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad p_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

   Die Basisvektoren von B_{-2} und $\vec{d}$ sind also linear abhängig, somit lässt sich $\vec{d}$ als Linearkombination der Basisvektoren von B_{-2} darstellen, liegt also in B_{-2}. Da p_2 verschieden von 0 ist, sind die Basisvektoren von B_2 und $\vec{d}$ linear unabhängig, also liegt $\vec{d}$ nicht in B_2. Außer für $a = 2$ liegt $\vec{d}$ also für alle Werte von a im Bildraum der Abbildung.

4. Formuliere die Gleichung $\varphi_a(\vec{x}) = \vec{d}$ als lineares Gleichungssystem, deute die drei auftretenden Gleichungen als Koordinatengleichungen von drei Ebenen und charakterisiere deren Lage zueinander in Abhängigkeit von a.

   Lösung: Die Vektorgleichung $\varphi_a(\vec{x}) = \vec{d}$ ergibt kompnentenweise:

$$(1) \quad x + 2y + az = 1; \qquad (2) \quad ay + z = 1; \qquad (3) \quad x + 6y + 2az = -1$$

   Das System hat genau dann Lösungen, wenn $\vec{d}$ in Bild(φ_a) liegt; falls es Lösungen gibt, sind dies so viele, wie der Kern der Abbildung Elemente hat. Es gibt also für $a^2 \neq 4$ genau eine Lösung, für $a = -2$ unendlich viele Lösungen und für $a = 2$ keine Lösung.

   Die drei Gleichungen beschreiben drei Ebenen, von denen sich je zwei in einer Geraden schneiden. Ist g_1 Schnittgerade der Ebenen (1) und (2), g_2 die Schnittgerade der Ebenen (2) und (3), so folgt weiter: Die Geraden g_1 und g_2 schneiden sich für $a^2 \neq 4$ in genau einem Punkt, fallen für $a = -2$ zusammen, und sind für $a = 2$ parallel und verschieden.