

# Der Approximationssatz der linearen Algebra

Klaus-R. Loeffler

## 1 Approximationssatz

### Voraussetzung

$V$  sei ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt  $*$ .

$\|\dots\|$  sei die durch das Skalarprodukt induzierte Norm auf  $V$  ( $\|\vec{a}\| := \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$ ).

$U$  sei ein Unterraum von  $V$  mit der Orthonormalbasis  $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k)$ .

$\vec{x}$  sei ein Vektor aus  $V$ , mit  $r_i$  werde das Produkt  $\vec{x} * \vec{b}_i$  bezeichnet ( $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ).

$\vec{y} := \sum_{i=1}^k r_i \vec{b}_i$ .

### Behauptung

1.  $\vec{x} - \vec{y}$  ist orthogonal zu  $U$ .
2.  $\vec{y}$  approximiert  $\vec{x}$  in dem Sinn optimal, dass für jeden von  $\vec{x}$  verschiedenen Vektor  $\vec{z}$  aus  $U$  gilt:  $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \|\vec{x} - \vec{z}\|$ .

### Beweis

Für einen beliebigen Vektor  $\vec{d}$  aus  $U$  seien die Koordinaten bezüglich der Orthonormalbasis  $B$  mit  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$  bezeichnet. Dann gilt:

$$\|\vec{x} - \vec{d}\|^2 = \|\vec{x} - \sum_{i=1}^k s_i \vec{b}_i\|^2 = \vec{x} * \vec{x} - 2\vec{x} * \sum_{i=1}^k s_i \vec{b}_i + \sum_{i=1}^k s_i \vec{b}_i * \sum_{i=1}^k s_i \vec{b}_i$$

Da das Produkt  $\vec{b}_i * \vec{b}_j$  für  $i \neq j$  verschwindet und für  $i = j$  den Wert 1 hat, ergibt sich:

$$\|\vec{x} - \vec{d}\|^2 = \vec{x} * \vec{x} - 2 \sum_{i=1}^k \vec{x} * s_i \vec{b}_i + \sum_{i=1}^k s_i^2 = \vec{x} * \vec{x} + \sum_{i=1}^k (s_i^2 - 2s_i \vec{x} * \vec{b}_i)$$

Mit quadratischer Ergänzung formt man um zu

$$\|\vec{x} - \vec{d}\|^2 = \vec{x} * \vec{x} - \sum_{i=1}^k (\vec{x} * \vec{b}_i)^2 + \sum_{i=1}^k (s_i^2 - 2s_i \vec{x} * \vec{b}_i + (\vec{x} * \vec{b}_i)^2)$$

und erhält damit

$$\|\vec{x} - \vec{d}\|^2 = \vec{x} * \vec{x} - \sum_{i=1}^k (\vec{x} * \vec{b}_i)^2 + \sum_{i=1}^k (s_i - \vec{x} * \vec{b}_i)^2$$

## 2 Anwendungsbeispiele für den Approximationssatz

Die Summanden im Ausdruck  $\sum_{i=1}^k (s_i - \vec{x} * \vec{b}_i)^2$  sind alle nicht-negativ; der Ausdruck nimmt also seinen minimalen Wert 0 genau dann an, wenn alle Summanden verschwinden, wenn also für alle Indizes  $i$  gilt  $s_i = \vec{x} * \vec{b}_i$ . Damit ist die zweite Behauptung bewiesen.

Als Nebenresultat erhält man wegen  $\vec{x} * \vec{x} - \sum_{i=1}^k (\vec{x} * \vec{b}_i)^2 = \|\vec{x} - \sum_{i=1}^k (\vec{x} * \vec{b}_i) \vec{b}_i\|^2 \geq 0$  die folgende *Besselsche Ungleichung*:

$$\sum_{i=1}^k (\vec{x} * \vec{b}_i)^2 \leq \vec{x} * \vec{x}$$

Zum Nachweis des ersten Teils der Behauptung wird gezeigt, dass  $\vec{x} - \sum_{i=1}^k (\vec{x} * \vec{b}_i) \vec{b}_i$  orthogonal zu allen Elementen der Basis von  $U$  ist. Für jedes  $j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$  gilt:

$$\left( \vec{x} - \sum_{i=1}^k (\vec{x} * \vec{b}_i) \vec{b}_i \right) * \vec{b}_j = \vec{x} * \vec{b}_j - \sum_{i=1}^k (\vec{x} * \vec{b}_i) \vec{b}_i * \vec{b}_j = \vec{x} * \vec{b}_j - \vec{x} * \vec{b}_j = 0$$

Damit ist der Beweis des Approximationssatzes abgeschlossen.

## 2 Anwendungsbeispiele für den Approximationssatz

1. Bestimmung des Fußpunkts, den das im Raum von einem Punkt  $P$  auf eine Ursprungsgerade  $g$  gefällte Lot hat.

Hierbei wählt man  $\vec{x}$  als Ortsvektor des Punktes  $P$  und den Unterraum  $U$  als lineare Hülle eines Richtungsvektors von  $g$ . Der approximierende Vektor ist dann der Ortsvektor des gesuchten Fußpunkts.

2. Bestimmung des Fußpunkts, den das im Raum von einem Punkt  $P$  auf eine Ursprungsebene  $e$  gefällte Lot hat.

Man wählt man  $\vec{x}$  als Ortsvektor des Punktes  $P$  und den Unterraum  $U$  als lineare Hülle zweier linear unabhängiger Richtungsvektoren von  $e$ . Der approximierende Vektor ist dann der Ortsvektor des gesuchten Fußpunkts.

3. Lineare Regression

Wenn hierbei  $\{(x_i; y_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\}$  die vorgelegte Messreihe ist, setzt man

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \langle \vec{x}, \vec{e} \rangle, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad V = \mathbf{R}^n$$

Da die Koeffizienten  $m$  und  $b$  gesucht werden, für welche  $\sum_{i=1}^n (mx_i + b - y_i)^2$  minimal wird, ist der Ausdruck  $\|\vec{m}\vec{x} + b\vec{e} - \vec{y}\|$  zu minimieren, also  $\vec{y}$  aus dem Unterraum  $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle$  heraus zu approximieren.

4. Regression höheren Grades, also z.B. quadratische Regression.

Die Rechnung erfolgt analog zum vorhergehenden Beispiel, nur dass der Unterraum  $U$  hier nicht die Dimension 2, sondern  $k$  hat (bei Regression  $k$ -ten Grades).

## 2 Anwendungsbeispiele für den Approximationssatz

Als den Unterraum  $U$  aufspannende Vektoren kommen zu  $\vec{x}$  und  $\vec{e}$  noch die  $k - 1$  Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \\ \vdots \\ x_n^3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} \text{ hinzu.}$$

5. Approximation einer stetigen Funktion aus einem Unterraum stetiger Funktionen heraus.

Hierzu ist an anderer Stelle (s. Verzeichnis der Themen) ein eigenes Beispiel gegeben.