Interpolation durch Polynome

Klaus-R. Loeffler

2012

1 Hinführung

Wenn von einer Funktion nicht mehr an allen Stellen die Werte bekannt sind oder wenn die Berechnung einzelner Funktionswerte zu aufwendig erscheint, ist es oft zweckmäßig, an diesen Stellen ersatzweise Werte zu verwenden, die besonders einfach zu berechnen und gut in den Verlauf einer Kurve einzufügen sind.
Weiß man etwa, dass der Verlauf eines Graphen zwischen zwei seiner Punkte A und B annährend geradlinig ist, kann man diesen Teil des Graphen durch die Strecke AB ersetzen, wobei die nun stückweise definierte Funktion in der Regel an den Stellen x_A und x_B nicht (mehr) differenzierbar ist.
Begnügt man sich bei einer solchen Ersatzfunktion g für eine Funktion f damit, dass die Werte beider Funktionen an endlich vielen vorgegebenen Stellen $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ übereinstimmen, so leistet eine einfach zu bestimmende ganzrationale Funktion g das Gewünschte. Die Idee bei der Ermittlung einer solchen Funktion g ist die folgende:
Es ist einach, ein Polynom anzugeben, dessen Nullstellenmenge $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ ist, nämlich das Polynom $\prod_{i=0}^{n}(x_i - x)$. Durch eine Normierung kann man zusätzlich erreichen, dass an einer vorgegebenen Stelle a ($a \notin \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$) ein vorgegebener Wert b angenommen wird, indem man durch $\prod_{i=0}^{n}(x_i - a)$ dividiert und das Ergebnis mit b multipliziert.

2 Das Ergebnis

Sind also die paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ und die zu ihnen gehörenden Werte $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ vorgegeben, so ist für jeden Index k ($\in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$) die durch

$$g_k(x) := \prod_{\substack{0 \le i \le n \\ i \ne k}} \frac{x_i - x}{x_i - x_k} \cdot y_k$$

definierte Funktion g_k eine ganzrationale Funktion höchstens n-ten Grades, die an der Stützstelle x_k den Wert y_k annimmt und an allen anderen Stützstellen verschwindet.
Die gesuchte interpolierende ganzrationale Funktion g ergibt sich daher mit der Gleichung

$$g(x) = \sum_{0 \le k \le n} g_k(x) = \sum_{0 \le k \le n} \prod_{\substack{0 \le i \le n \\ i \ne k}} \frac{x_i - x}{x_i - x_k} \cdot y_k.$$

Das so konstruierte Polynom g(x) ist das einzige Polynom höchstens n-ten Grades, das die Bedingung

$$\bigwedge_{i \in \{0,1,2,3,\ldots,n\}} g(x_i) = y_i$$

erfüllt. Denn hätte ein zweites Polynom $h(x)$ die gleichen Eigenschaften, wäre $g - h$ eine ganzrationale Funktion höchstens n-ten Grades mit mindestens $n + 1$ Nullstellen, also konstant null.

3 Eine Variante

Gelegentlich hat man bereits ein Interpolation berechnet, wenn noch eine weitere St"tzstelle hinzugenommen werden soll. Oder man errät eine ganzrationale Funktion, auf deren Graph bereits n der gegebenen Stützpunkte liegen, so dass die Funktion nur noch an einer Stelle nicht den gewünschten Wert hat. In diesem Fall braucht man nicht die Summandenpolynome für alle $n+1$ Stellen zu konstruieren, sondern es genügt, den vorhandenen Graphen an der einen Stelle - nach geeigneter Umnummerierung sei dies die Stelle n zu verbiegen.
Ist g_{alt} die vorliegende (oder erratene) Funktion, erhält man den gewünschten Einschluss der hinzugekommenen Stelle x_n durch die Konstruktion

$$g_{neu}(x) = g_{alt}(x) + \prod_{0 \leq i \leq n-1} \frac{x_i - x}{x_i - x_n} \cdot (y_n - g_{alt}(x_n)).$$

Denn der zweite Summand verschwindet an den Stützstellen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und hat an der Stelle x_n den Wert y_n.

4 Programmhinweis

Das parallel zu diesem Artikel geschriebene Programm *Interpolation* auf der Homepage des Verfassers (Download von `http://www.mathemator.org/programmliste.html`) berechnet zu bis zu 10 Stützpunkten das zugehörige Interpolationspolynoms in der Normalform (also entwickelt an der Stelle 0) und berechnet weitere Funktionswerte.