Die Summe der k-ten Potenzen der ganzen Zahlen von 1 bis n

Klaus-R. Löffler

Inhaltsverzeichnis

0 Zum Thema dieser Darstellung

Die nachfolgenden Ausführungen beschäftigen sich mit der Formel für die Summe der k-ten Potenzen ($k \in \mathbb{N}$) der ersten n positiven ganzen Zahlen, also $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$[1]. Dabei ist die natürliche Zahl n beliebig, aber meistens innerhalb der jeweiligen Betrachtung konstant. Die folgende abkürzende Notation wird für $k \in \mathbb{N}$ eingeführt:

$$s_k := \sum_{i=1}^{n} i^k$$

[1]Die Frage nach dem Wert dieser Summe tritt z.B. auf, wenn man das bestimmte Integral $\int_0^1 x^k dx$ als Grenzwert der Integrale der unteren Treppenfunktionen bei der Zerlegung von $[0; 1]$ in n Intervalle gleicher Länge berechnen will.

Wenn innerhalb einer Betrachtung n variabel ist, wird die Bezeichung $s_k(n) := \sum_{i=1}^n i^k$ verwendet. Für die ersten Werte von k ergibt sich recht einfach

$$k=0 \quad : \quad s_0 = \sum_{i=1}^n i^0 = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

$$k=1 \quad : \quad s_1 = \sum_{i=1}^n i^1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n (n+1-i)\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (n+1) = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$$

Auch mit einfachen - etwa geometrischen Deutungen - lässt sich der Wert für s_1 begründen; hierzu nachfolgend zwei Beispiele:

1. Stellt man sich $n+1$ durchnummerierte Punkte vor, die man mit Pfeilen im Sinne der Ordnung (von der kleineren zur größeren Nummer) verbindet, so gehen n Pfeile vom Punkt 1, aus $n-1$ Pfeile vom Punkt 2, usw. also sind insgesamt $n+(n-1)+\ldots+1$, mithin s_1 Pfeile zu ziehen. Würde man jeden Punkt mit allen anderen verbinden, wären das insgesamt $(n+1)\cdot n$ Verbindungen; da hierbei zu jedem Pfeil genau zwei Verbindungen gehören, hat man $\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$ Pfeile[2].

2. Zählt man die Felder eines Schachbretts mit $n \times n$ Feldern mit der Diagonale abbrechend nach Schrägzeilen ab, hat man $1+2+3+\cdots+n$ Felder. Das sind $\frac{n}{2}$ Felder mehr als die Hälfte der Anzahl aller Felder, also $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$, und somit $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ Felder.

Geht man bei der Suche nach Formeln für s_k weiter zum Fall $k=2$, scheinen sich bereits keine einfachen anschaulichen Deutungen anzubieten. Zwar kann man, um eine geometrische Interpretation heranzuziehen, sich $\sum_{i=1}^n i^2$ als Volumen eines symmetrischen Turms von Quadern mit quadratischer Grundfläche und der Höhe 1 vorstellen, das man dann aus dem Volumen der umgebenden Pyramide und den Volumina der in den Hohlräumen befindlichen Pyramiden und Prismen berechnen kann, aber wie die obigen Beispiele liefert das Verfahren keine auf die weiteren Werte von k übertragbare Berechnungsmethode.
Nachfolgend werden Verfahren angegeben, deren Anwendungsmöglichkeit nicht auf spezielle Werte von k begrenzt ist.

1 Die Bestimmung des Polynoms $s_k(n)$

1.1 Die Polynombestimmung durch Lösen eines linearen Gleichungssystems

Wenn man weiß, das die Folge (n^k) der k-ten Potenzen der natürlichen Zahlen eine arithmetische Folge k-ter Ordnung, also die Folge $(s_k(n))$ der Teilsummen eine arithmetische Folge k-ter Ordnung ist und somit durch ein Polynom vom Grade $k+1$ beschrieben werden kann, lassen sich die Koeffizienten dieses Polynoms durch Einsetzen von $k+2$ Werten, also z.B. die berechneten Werte $s_k(0), sk_(1), \ldots, s_k(k+1)$ und Lösen des entstandenen Gleichungssssystems bestimmen.
So hat man im einfachen Fall $k=1$, dass $s_1(n)$ ein Polynom zweiten Gerades, also mit einer Darstellung $s_1(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2$ ist. Wegen $s_1(0), s_1(1), s_1(2) = (0,1,3)$ erhält man das Gleichungssystem

$$a_0 = 0 \ \wedge \ a_0 + a_1 + a_2 = 1 \ \wedge \ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3$$

mit der Lösung $(a_0, a_1, a_2) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, mithin $s_1(n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$.

Im Fall $k=2$ ergibt die analoge Vorgehensweise:

[2]Noch anschaulicher kann mit sich eine Gesellschaft von n Gästen bei einem Gastgeber vorstellen. Stellt man sich die Gäste nacheinander eintreffend vor, gibt es erst eine, dann zwei, dann drei usw. bis n Begrüßungen. Da jeder alle anderen Personen und keiner sich selber begrüßt, ergibt sich damit die Formel.

Mit dem Ansatz $s_2(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$ hat man wegen $s_2(0), s_2(1), s_2(2), s_2(3)) = (0, 1, 5, 13)$ das Gleichungsssystem

$$a_0 = 0 \ \wedge \ a_1 + a_2 + a_3 = 1 \ \wedge \ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 5 \ \wedge \ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 14$$

mit der Lösung $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, also $s_2(n) = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \quad (= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1))$.

Im allgemeinen Fall bestimmt man also die Koeffizienten des Polynoms $s_k(n) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i n^i$, indem man für $n = 1, 2, 3, \ldots, k+1$ den Wert $s_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$ berechnet und zur Berechnung der Koeffizienten a_i das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{k+1} n^i \ a_i = s_k(n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, k+1)$$

löst. Die Koeffizientenmatrix dieses Systems ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 4 & 8 & \ldots & 2^{k+1} \\ 3 & 9 & 27 & \ldots & 3^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k^2 & k^3 & \ldots & k^{k+1} \\ k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & \ldots & (k+1)^{k+1} \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $(k+1)! \cdot \prod_{k+1 \le i < j \le 1} (i - j)$.
Damit berechnet sich der Koeffizient $a_i \quad (1 \le i \le k+1)$ z.B. mit der Cramerschen Regel als

$$\frac{1}{(k+1)! \cdot \prod_{k+1 \le i < j \le 1} (i-j)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & s_k(1) & \ldots & 1 \\ 2 & 4 & 8 & \ldots & s_k(2) & \ldots & 2^{k+1} \\ 3 & 9 & 27 & \ldots & s_k(3) & \ldots & 3^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ k & k^2 & k^3 & \ldots & s_k(k) & \ldots & k^{k+1} \\ k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & \ldots & s_k(k+1) & \ldots & (k+1)^{k+1} \end{vmatrix} .$$

Mit weniger Rückgriff auf Sätze über arithmetische Folgen höherer Ordnung und ihren Zusammenhang mit Polynomen kann man diesen Ansatz benutzen, um die Koeffizienten zunächst ohne Verpflichtung zu einer Begründung zu erraten, und dann die Formel für $S_k(n)$ zunächst als Vermutung aufstellen und dann durch vollständige Induktion zu beweisen.
Dieser Weg wird nachfolgend am Beispiel $k = 3$ durchgeführt.
Mit den Werten $(s_3(1), s_3(2), s_3(3), s_3(4)) = (1, 9, 36, 100)$[3] ergibt sich für das zu lösende Gleichungssystem die Systemdeterminante $D = 4! \cdot \prod_{4 \le i < j \le 1} (i - j) = 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 288$. Nach der Cramerschen Regel erhält man

$$a_1 = \frac{1}{288} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 36 & 64 & 256 \end{vmatrix} = 0 \ , \quad a_2 = \frac{1}{288} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 36 & 64 & 256 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \ ,$$

$$a_3 = \frac{1}{288} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 36 & 64 & 256 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \ , \quad a_4 = \frac{1}{288} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 36 & 64 & 256 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \ .$$

[3]Mit der Beobachtung, dass hier alle auftretenden Werte Quadratzahlen sind, lässt sich in diesem Spezialfall auch mit $s_3(n) = (a_1 n + a_2 n^2)^2$ mit einem vereinfachten Ansatz arbeiten.

Die zu bestimmende Formel ist also $s_3(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 \quad (= \frac{1}{4}(n \cdot (n+1))^2$.
Ist die Formel nicht aus der Theorie begründet, sondern nur vermutet, wird sie nun durch vollständige Induktion bewiesen. Für $n = 1$ ist sie richtig: $\frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^3 + \frac{1}{4} \cdot 1^4 = 1 = s_3(1)$.
Zum Induktionsschluss werde die Richtigkeit der Formel für ein festes n vorausgesetzt und unter dieser Voraussetzung für $n+1$ bewiesen. Zu zeigen ist also:

$$s_3(n+1) = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2.$$

Unter Verwendung der Definition von $s_3(n)$ und der Induktionsvoraussetzung hat man

$$\begin{aligned} s_3(n+1) &= s_3(n) + (n+1)^3 = \frac{1}{4}n^2 \cdot (n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4) = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2, \end{aligned}$$

womit der Induktionsbeweis abgeschlossen ist.

1.2 Die Darstellung als Lagrange'sches Interpolationspolynom

Wenn als bekannt vorausgesetzt werden darf, dass der gesuchte Term für die Potenzsumme $s_k(n)$ ein Polynom $k+1$-ten Grades in n ist, kann man $s_k(n)$ mit Hilfe der Lagrange-Formel für die Stützpunkte $(i, s_k(i)),\ (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ erhalten.
Setzt man abkürzend für $i = 0, 1, 2, \ldots, k$

$$p_i(n) := \frac{\prod_{0 \le j \le k; j \ne i}(n-j)}{\prod_{0 \le j \le k; j \ne i}(i-j)} s_k(i), \quad \text{folgt } s_k(n) = \sum_{i=0}^{k} p_i(n) \quad \left(= \sum_{i=1}^{k} p_i(n), \text{denn } p_0(n) = 0 \right).$$

1.3 Berechnungsbeispiel s_2

Wegen $s_2(0) = 0, \quad s_2(1) = 1, \quad s_2(2) = 1 + 4 = 5, \quad s_2(3) = 5 + 9 = 14$ hat man

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{n \cdot (n-2)(n-3)}{1 \cdot (1-2) \cdot (1-3)} \cdot 1 = \frac{1}{2}n(n-2)(n-3) = \frac{3}{6}n(n^2 - 5n + 6) \\ p_2(n) &= \frac{n(n-1)(n-3)}{2 \cdot (2-1)(2-3)} \cdot 5 = -\frac{5}{2}n(n-1)(n-3) = -\frac{15}{6}n(n^2 - 4n + 3) \\ p_3(n) &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot (3-1)(3-2)} \cdot 14 = \frac{14}{6}n(n-1)(n-2) = \frac{14}{6}n(n^2 - 3n + 2) \end{aligned}$$

und somit

$$s_2(n) = \frac{1}{6}(2n^2 + 3n - 9) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \ .$$

1.4 Die rekursive Berechnung

1.4.1 Berechnung von s_k

Der nachfolgend beschriebene Weg der rekursiven Berechnung benutzt wesentlich den binomischen Satz
$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}\, b^i$ in der folgenden speziellen Form für $n, k \in \mathbb{N}$:

$$(i-1)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^j i^{k+1-j}.$$

Dabei lässt sich der Binomialkoeffizient $\binom{n}{i}$ z.B. deuten als Anzahl der i-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Mit dieser Deutung der Binomialkoeffizienten ergibt sich der binomische Satz ohne weitere Rechnung[4].

$$\begin{aligned}
n^{k+1} &= \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} - \sum_{i=1}^{n-1} i^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} - \sum_{i=2}^{n} (i-1)^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i^{k+1} - (i-1)^{k+1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(i^{k+1} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^j i^{k+1-j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{j+1} i^{k+1-j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left((k+1) \cdot i^k - \sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^j i^{k+1-j} \right)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} (k+1) \cdot i^k = n^{k+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^j i^{k+1-j} \right),$$

$$\text{also } (k+1) \cdot s_k(n) = n^{k+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^j i^{k+1-j} \right).$$

Umformung ergibt

$$\begin{aligned}
s_k(n) &= \frac{1}{k+1} \left(n^{k+1} + \sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^j \sum_{i=1}^{n} i^{k+1-j} \right) \\
&= \frac{1}{k+1} \left(n^{k+1} + \sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^j s_{k+1-j}(n) \right).
\end{aligned}$$

Damit lassen sich die Formeln für $s_k(n)$ rekursiv berechnen. Als Beispiele werden nachfolgend s_3 und s_4 mithilfe der bisher bestimmten Werte für s_0, s_1, s_2, berechnet:

$$\begin{aligned}
s_3(n) &= \frac{1}{4} \left(n^4 + \sum_{j=2}^{4} \binom{4}{j} (-1)^j s_{4-j}(n) \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(n^4 + \binom{4}{2} s_2(n) - \binom{4}{3} s_1(n) + \binom{4}{4} s_0(n) \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(n^4 + 6 s_2(n) - 4 s_1(n) + s_0(n) \right) = \frac{1}{4} \left(n^4 + 6 \cdot \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \right) \\
&= \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) \qquad (= \frac{1}{4} n^2 \cdot (n+1)^2)
\end{aligned}$$

Berechnung von $s_4(n)$:

$$s_4(n) = \frac{1}{5} \left(n^5 + \sum_{j=2}^{5} \binom{5}{j} (-1)^j s_{5-j}(n) \right)$$

[4] Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{i}$ lässt sich, wie einfach durch vollständige Induktion zu zeigen ist, berechnen als $\frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}\left(n^5 + \binom{5}{2}s_3(n) - \binom{5}{3}s_2(n) + \binom{5}{4}s_1(n) - \binom{5}{5}s_0(n)\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(n^5 + 10s_3(n) - 10s_2(n) + 5s_1(n) - s_0(n)\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(n^5 + \frac{5}{2}(n^4 + 2n^3 + n^2) - \frac{5}{3}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{5}{2}(n^2 + n) - n\right) \\
&= \frac{n}{30}\left(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1\right) \qquad \left(= \frac{n(n+1)}{30}(6n^3 + 9n^2 + n - 1)\right)
\end{aligned}$$

1.4.2 Berechnung einzelner Koeffizienten des Polynoms $s_k(n)$

Man bezeichne die Koeffizienten des Polynoms $s_k(n)$ mit $a_{kr} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots k+1)$, also

$$s_k(n) = \sum_{r=0}^{k+1} a_{kr} n^r.$$

Aus

$$\begin{aligned}
s_k(n) &= \frac{1}{k+1}\left(n^{k+1} + \sum_{j=2}^{k+1}\binom{k+1}{j}(-1)^j s_{k+1-j}(n)\right) \\
&= \frac{1}{k+1}\left(n^{k+1} + \sum_{j=2}^{k+1}\binom{k+1}{j}(-1)^j \sum_{r=0}^{k+1} a_{k+1-j,r} n^r\right) \\
&= \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k+1}\sum_{j=2}^{k+1}\binom{k+1}{j}(-1)^j a_{k+1-j,r} n^r
\end{aligned}$$

erhält man dann als Formel für die Koeffizienten des Polynoms s_k

$$a_{k,k+1} = \frac{1}{k+1} \wedge \bigwedge_{r<k+1} a_{k,r} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=2}^{k+1}\binom{k+1}{j}(-1)^j a_{k+1-j,r} \ .$$

2 Liste der Formeln für $k = 0, 1, 2, \ldots 8$

$$\begin{aligned}
s_0 &= n\ , \quad s_1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \ \left(= \frac{n(n+1)}{2}\right), \quad s_2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \quad \left(= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right) \\
s_3 &= \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) \quad \left(= \frac{1}{4}n^2 \cdot (n+1)^2\right) \\
s_4 &= \frac{n}{30}\left(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1\right) \quad \left(= \frac{n(n+1)}{30}(6n^3 + 9n^2 + n - 1)\right) \\
s_5 &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \quad \left(= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)\right) \\
s_6 &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \quad \left(= \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)\right) \\
s_7 &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \quad \left(= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)\right) \\
s_8 &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n^2
\end{aligned}$$

$$\left(= \frac{1}{90}n(n+1)(10n^7+35n^6+25n^5-25n^4-17n^3+17n^2+3n-3)\right)$$

$$s_9 = \frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2$$

$$\left(= \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)\right)$$

3 Erster Anhang: Geometrische Summen

Eine Summe $\sum_{i=0}^n a_i$ heißt *geometrisch*, wenn es eine reelle Zahl q gibt, für die alle Summenden die Rekursion $a_i = q \cdot a_{i-1}$ erfüllen. Das ist offenbar genau dann der Fall[5], wenn für jeden Index i gilt $a_i = a_0 \cdot q^i$.
Die Fälle $q = 0$ und $q = 1$ werden vorab erledigt:

$$q=0 \quad : \quad \sum_{i=0}^n q^i = \sum_{i=0}^n 0^i = 1, \qquad \left(\sum_{i=1}^n 0^i = 0\right)$$

$$q=1 \quad : \quad \sum_{i=0}^n q^i = \sum_{i=0}^n 1^i = n+1 \qquad \left(\sum_{i=1}^n 1^i = n\right)$$

Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ergibt die Umformung

$$(q-1)\cdot\sum_{i=0}^n a\cdot q^i = \sum_{i=0}^n a\cdot q^{i+1} - \sum_{i=0}^n a\cdot q^i = \sum_{i=1}^{n+1} a\cdot q^i - \sum_{i=0}^n a\cdot q^i = a\cdot q^{n+1} - a$$

Als Formel für die geometrische Summe ergibt sich somit

$$\sum_{i=0}^n a\cdot q^i = a\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Da die Folge $(q^n)_n$ für $|q| < 1$ eine Nullfolge ist, ergibt sich daraus für solche Werte von q die Konvergenz der geometrischen Reihe $(\sum_{i=0}^n aq^i)_n$: $\sum_{n=0}^\infty aq^n = \frac{a}{q-1}(q^{n+1}-1)$

3.1 Kanonenschuss auf die Spatzen s_1, s_2

Durch Ableiten[6] der Formel für die geometrische Summe $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ $(=: h(x))$ erhält man

$$h'(x) = \sum_{i=1}^n i\cdot x^{i-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

3.1.1 Bestimmung von s_1

Als Polynom ist h' auch an der Stelle 1 stetig; 1 ist die gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner des Bruchterms, die Ermittlung des Grenzwerts an der Stelle 1 kann für die rechte Seite also nach der Regel von L'Hpital erfolgen. Ableiten von Zähler und Nenner führt zum Ausdruck

$$\frac{n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1}}{2(x-1)} = \frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1} \to \frac{1}{2}n(n+1) \text{ (für } x\to 1)$$

Wegen $\lim_{x\to 1}\sum_{i=1}^n i\cdot x^{i-1} = \sum_{i=1}^n i$ folgt daher $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$.

[5]Der Nachweis dieser Äquivalenz ist in einer Richtung trivial, in der anderen ergibt er sich durch Induktion.
[6]Nach der Quotientenregel ist $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$

3.1.2 Bestimmung von s_2

Unter Verwendung des im vorhergehenden Abschnitt berechneten Ausdrucks für $h'(x)$ setzt man

$$p(x) := x \cdot h'(x) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot x^i = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$$

und erhält durch Ableiten von p und Kürzen mit $x - 1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot x^{i-1} &= \frac{(x-1)(n(n+2)x^{n+1} - (n+1)^2 x^n + 1) - 2(nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{n^2 x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

Der Grenzwert an der Stelle 1 ist $\sum_{i=1}^{n} i^2$, also s_2. Analog zur obigen Bestimmung von s_1 liefert die L'Hpitalsche Regel

$$\begin{aligned}s_2 &= \lim_{x\to 1} \frac{n^2 x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^3} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{n^2(n+2)x^{n+1} - (2n^2 + 2n - 1)(n+1)x^n + n(n+1)^2 x^{n-1} - 1}{3(x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{n^2(n+1)(n+2)x^n - n(2n^2 + 2n - 1)(n+1)x^{n-1} + n(n-1)(n+1)^2 x^{n-2}}{6(x-1)} \\ &= n(n+1) \lim_{x\to 1} \frac{n(n+2)x^n - (2n^2 + 2n - 1)x^{n-1} + (n-1)(n+1)x^{n-2}}{6(x-1)} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \lim_{x\to 1} n^2(n+2)x^{n-1} - (n-1)(2n^2 + 2n - 1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)(n+1)x^{n-3} \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(n^2(n+2) - (n-1)(2n^2 + 2n - 1) + (n-1)(n-2)(n+1)) \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1)\end{aligned}$$

Das ist bereits an früherer Stelle ermittelte Ergebnis.

4 Zweiter Anhang: Reihen von Potenzen der Stammbrüche

Während bisher (außer im ersten Anhang) Summen von Potenzen der natürlichen Zahlen und vor allem zusammenfassende Formeln für diese Summen untersucht wurden, wird nun noch kurz auf Summen von Potenzen der Stammbrüche betrachtet, also Summen der Form $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^k}$.
Der Versuch, eine geschlossene Formel für $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^k}$ zu finden, bleibt ohne Erfolg. Auch für Exponenten $k > 1$ sind keine geschlossenen algebraischen Ausdrüche für $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^k}$ anzugeben.
So bleiben als interessante Fragen, ob die unendliche Reihe, bei denen die Partialsummen von der Form $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^k}$ sind, konvergent sind; wenn ja, was ihr Grenzwert ist.
Dabei ist die erste Frage leicht zu beantworten, die zweite - zumindest mit elementaren mathematischen Mitteln - dagegen nicht.

Da $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^k}$ aus streng monoton abnehmenden Summanden besteht, die jede positive Grenze unterschreiten, könnte man vermuten, dass die Folge $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^k}\right)_n$ für wachsendes n einem Grenzwert zustrebt. Da die Folgenglieder von (S_n) monoton wachsen, ist dies äquivalent zur Beschränktheit der Folge, also der Existenz einer oberen Schranke N mit der Eigenschaft, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^k} \leq N$.

4.1 Die harmonische Reihe; $k = 1$

Eine Möglichkeit zum Nachweis der Nichtbeschränktheit ergibt sich aus der folgenden Abschätzung

$$S_{2^m} = \sum_{i=1}^{2^m} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{2^j} \frac{1}{2^j + i} > \frac{3}{2} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{2^j} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{3}{2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{2^j}{2^{j+1}} > \frac{m}{2} \ .$$

Eine andere Möglichkeit liefert die Integralrechnung:
Da für $x \in [i, i+1]$ die Abschätzung $\frac{1}{i+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{i}$ gilt, liefert die Zerlegung des Intervalls $[1, n+1]$ in n Teilintervalle der Länge 1, die folgende Abschätzung des Integrals von $\frac{1}{x}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \leq \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} \,\mathrm{dx} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \ , \quad \text{also} \quad 0 \leq \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} \,\mathrm{dx} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} = \frac{n}{n+1}$$

Damit hat man $-1 \leq \ln(n+1) - S_{n+1} \leq -\frac{1}{n}$, also die Beschränktheit der Folge $(\ln(n) - S_n)_n$, was wegen der Unbeschränktheit der Logarithmusfunktion nicht nur zeigt, dass die Folge (S_n) nicht beschränkt ist, sondern auch noch eine Näherungsaussage liefert: $S_n \in [\ln(n+1), 1 + \ln(n)]$.

4.2 Die Reihe $(\sum \frac{1}{n^k})_n$ für $k \geq 2$

Aus der (einfach zu beweisende)[7] Summenformel $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{n}{n+1}$ ergibt sich für $k \geq 2$ wegen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^k} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = 1 + \frac{n-1}{n} < 2$$

die Beschränktheit der Reihe $(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^k})_n$, also die Existenz des endlichen Reihenwerts $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Die Berechnung der Reihenwerte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k = 2, 3, \ldots$, z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, erfordert höhere mathematische Hilfsmittel[8] als die in dieser Darstellung vorausgesetzten.

Letzte Bearbeitung: Januar 2019

[7] z.B. durch vollständige Induktion oder mit folgender Umformung:
$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

[8] z.B. Theorie der Fourier-Reihen