Zum Satz von Taylor

Klaus-R. Loeffler

Inhaltsverzeichnis

1 Der verallgemeinerte Satz von Rolle

Bekanntlich besagt der Satz von Rolle, dass es für eine auf einem Intervall $[a;b]$ stetige, im Inneren des Intervalls differenzierbare Funktion f mit $f(a) = f(b) = 0$ stets im offenen Intervall $]a;b[$ eine Stelle c gibt, so dass $f(c) = 0$ gilt. Dieser (Existenz-) Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz vom Minimum und Maximum stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen in Verbindung mit dem lokalen Wachstumssatz. Mit vollständiger Induktion ergibt daraus die folgende Verallgemeinerung:

Voraussetzung: Es sei n eine natürliche Zahl und f eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetige Funktion, die bei a n-mal und im Inneren des Intervalls $(n+1)$-mal differenzierbar ist; weiterhin gelte: $f(a) = f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$.

Behauptung: Es gibt im Intervall $]a;b[$ eine Stelle c mit $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Beweis (durch Induktion): Die Aussage des Satzes ist für $n = 0$ offensichtlich richtig, denn dann stimmt der Satz mit dem Satz von Rolle überein.

Der erste Teil des Induktionsbeweises ist damit abgeschlossen.
Im zweiten Teil des Induktionsbeweises wird nun vorausgesetzt, dass n eine natürliche Zahl ist, und die Aussage des verallgemeinerten Satzes von Rolle für n richtig ist. Hiermit ist dann zu zeigen:

Wenn f eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetige Funktion ist, die an der Stelle a $(n+1)$-mal und im Inneren des Intervalls $(n+2)$-mal differenzierbar ist,

wobei $f(a) = f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n)}(a) = f^{(n+1)}(a) = f(b) = 0$ gilt, dann gibt es im Intervall $]a;b[$ eine Stelle c mit $f^{(n+2)}(c) = 0$.

Nach Induktionsannahme gibt es wegen $f(a) = f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$ im Intervall $]a;b[$ eine Stelle d mit $f^{(n+1)}(d) = 0$.

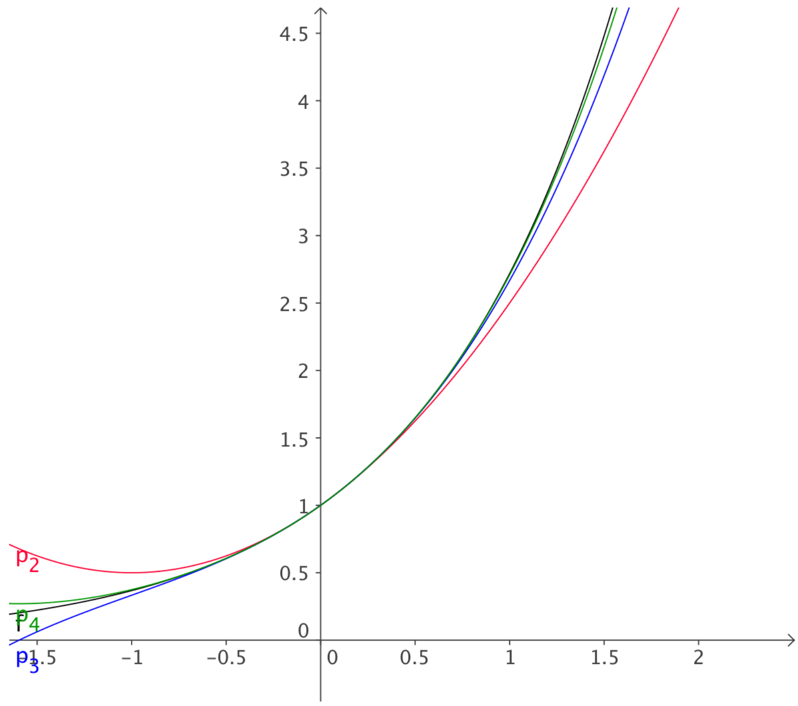
Somit gilt $f^{(n+1)}(a) = f^{(n+1)}(d) = 0$. Nach dem Satz von Rolle gibt es daher im Intervall $]a;d[$ eine Stelle c mit $(f^{(n+1)})'(c) = 0$.

Wegen $(f^{(n+1)})'(c) = f^{(n+2)}(c)$ und $a < c < d < b$ ist c eine Stelle im offenen Intervall $]a;b[$, für die $f^{(n+2)}(c) = 0$ gilt.

Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

2 Der Satz von Taylor

Unter dem (an der Stelle 0 entwickelten) n-ten Schmiegepolynom $p_n(x)$ einer bei 0 n-mal differenzierbaren Funktion f versteht man den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades p_n, welche für $i = 0, 1, 2, ..., n$ die Gleichung $p_n^{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$ erfüllt. Dieses Schmiegeplolynom hat dann die Gleichung $p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$.
Die Betrachtung von Beispielen solcher Schmiegepolynome, z.B. für die elementaren Funktionen exp, sin, cos, sinh, cosh zeigt, dass sich für größere Werte von n die Graphen der Schmiegepolynome in einer Umgebung von 0 recht gut an den Graphen von f anschmiegen, sodass man die leicht zu berechnenden Funktionswerte des Taylorpolynoms als Ersatzwerte für die nicht so einfach zu berechnenden Funktionswerte von f verwenden kann. Die Skizze zeigt den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion sowie die Graphen ihrer Schmiegepolynome p_2, p_3 und p_4.



Allerdings reicht dieser Eindruck einer guten Approximation keineswegs; wenn etwa die konkrete Aufgabe gestellt wird, die Eulersche Zahl e (also exp(1)) mit einem Fehler von weniger als 10^{-6} zu

berechnen, ist noch nicht sicher, ob es genügt, das Taylorpolynom $p_n(x)$ für ein geeignetes n an der Stelle 1 zu berechnen und - wenn ja - welcher Wert von n für die gewünschte Genauigkeit ausreichend ist. Man braucht also noch eine Abschätzung für die Differenz $|f(1) - p_n(1)|$.
Die Möglichkeit einer solchen Abschätzung liefert der Satz von Taylor.

Dabei wird folgendes vorausgesetzt:

Die auf dem abgeschlossenen Intervall $[0; b]$ definierte Funktion f ist bei 0 n-mal und im Inneren des Definitionsintervalls $(n + 1)$-mal differenzierbar und bei b stetig.

Dann sagt der Satz von Taylor folgendes aus:

Es gibt ein c aus $]0; b[$, für das gilt: $f(b) - p_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot b^{n+1}$.

Zum Beweis betrachte man die durch

$$h(x) = f(x) - p_n(x) - (f(b) - p_n(b)) \cdot \frac{x^{n+1}}{b^{n+1}}$$

definierte Hilfsfunktion h.

Diese erfüllt die Voraussetzungen des verallgemeinerten Satzes von Rolle, denn:

- Da zu f nur noch ganzrationale - also beliebig oft differenzierbare - Funktionen addiert werden, übertragen sich nach der Summenregel der Differentialrechnung die Differenzierbarkeits- und Stetigkeitsvoraussetzungen von f auf h.
- Für $i = 0, 1, 2, ..., n$ gilt $h^{(i)}(0) = 0$, denn nach der Definition des Taylorpolynoms ist für alle diese $f^{(i)}(0) = p_n^{(i)}(0)$. Und die i-te Ableitung der Potenzfunktion $(n+1)$-ten Grades enthält für i von 0 bis n den Faktor x^{n+1-i}, nimmt also an der Stelle $x = 0$ den Wert null an.
- $h(b) = f(b) - p_n(b) - (f(b) - p_n(b)) \cdot \frac{b^{n+1}}{b^{n+1}} = 0$.

Es gibt daher eine Stelle c im Intervall $]0; c[$ mit $h^{(n+1)}(c) = 0$.

Das bedeutet: $f^{(n+1)}(c) - p_n^{(n+1)}(c) - (f(b) - p_n(b)) \cdot \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} = 0$

Da die n-te Ableitung einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades eine Konstante ist, folgt

$$p_n^{(n+1)}(c) = 0; \qquad f^{(n+1)}(c) = (f(b) - p_n(b)) \cdot \frac{(n+1)!}{b^{n+1}}$$

Division durch $(n+1)!$ und Multiplikation mit b^{n+1} ergibt - nach Umordnen - die behauptete Gleichung.

3 Folgerungen, Anwendungen und Gegenbeispiele

3.1 Jede ganzrationale Funktion ist ihr eigenes Taylorpolynom

Zum Beweis betrachte man die Differenz zwischen Funktionswert und Wert des Taylorpolynoms an einer Stelle x; diese lässt sich nach dem Satz von Taylor als Vielfaches der $(n + 1)$-ten Ableitung von f an einer Stelle c darstellen; die $(n + 1)$-te Ableitung einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades ist aber 0, woraus die Behauptung folgt.

3.2 Der binomische Satz gilt:

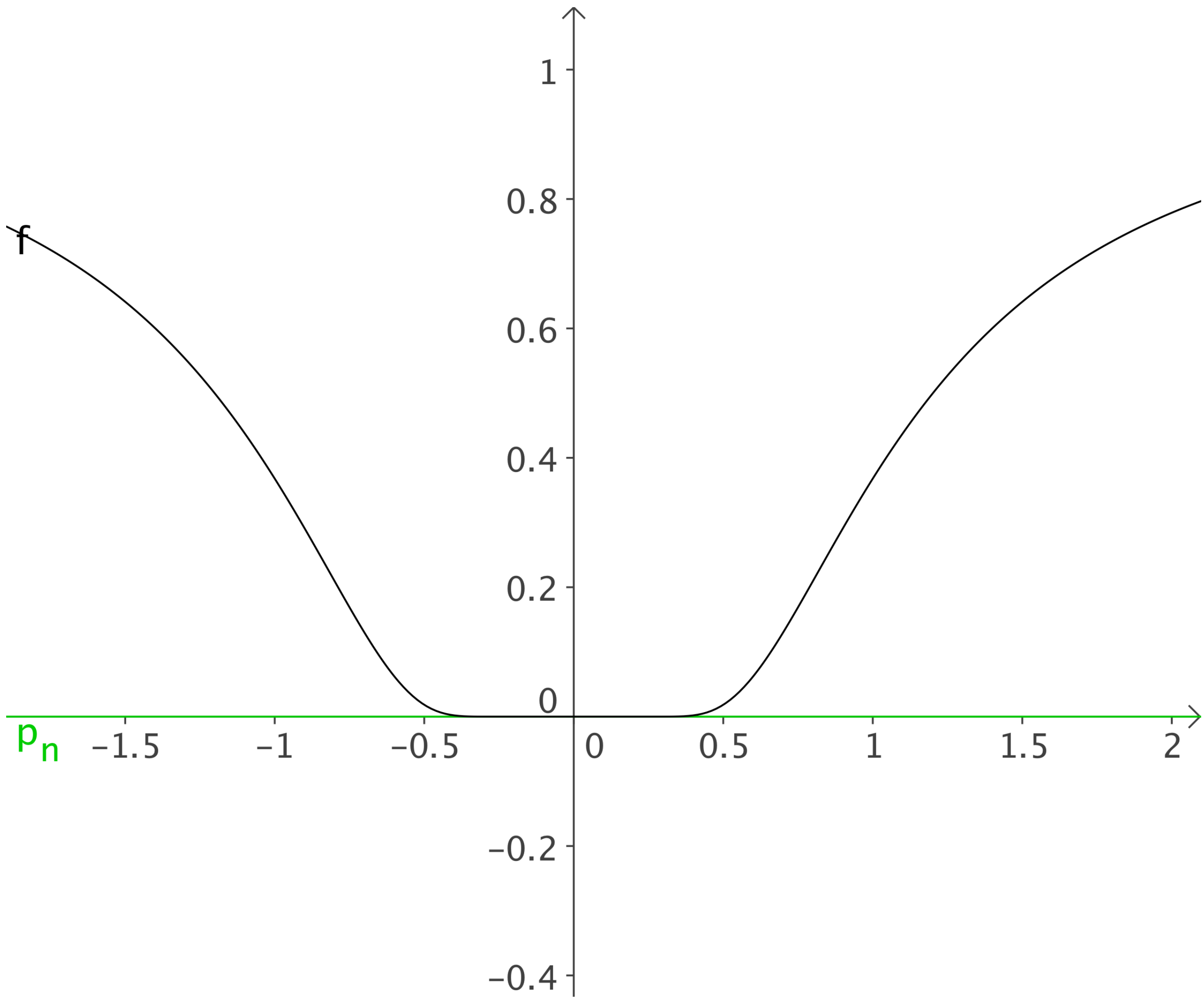
$(a + b)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$ Zum Beweis bestimme man das n-te Taylorpolynom $p_n(x)$ der Funktion f mit $f(x) = (a + x)^n$. Nach der ersten angegebenen Folgerung sind die Werte $f(x)$ und $p_n(x)$ für jedes x gleich. Wenn man diese Gleichung aufschreibt, steht (mit $x = b$) der binomische Satz da.

3.3 Approximierbarkeit einer speziellen Funktionenklasse

Nach einer bekannten Übungsaufgabe zur Analysis wird für jede reelle Zahl b und jedes reelle k der Wert des Ausdrucks $\frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot k$ beliebig klein, wenn man n hinreichend groß wählt. Hieraus folgt unmittelbar, dass sich für jede Funktion f die auf der Menge der reellen Zahlen beliebig oft differenzierbar ist und gleichmäßig beschränkte Ableitungen hat, für jede Stelle b die Differenz zwischen $f(b)$ und $p_n(b)$ beliebig klein machen lässt.
Dabei bedeutet gleichmäßige Beschränktheit der Ableitungen von f, dass eine reelle Zahl k mit der Eigenschaft existiert, dass für alle Stellen x und für alle Nummern n gilt $|f^{(n)}(x)| < k$.

3.4 Beispiel einer Funktion, die nicht durch ihr bei 0 entwickeltes Taylorpolynom approximiert wird

Die Vermutung, dass sich mithilfe der an der Stelle 0 entwickelten Schmiegepolynome Funktionswerte einer jeden unendlich oft differenzierbaren Funktion beliebig genau berechnen lassen, widerlegt das folgende Gegenbeispiel:
Die durch $f(0) = 0$ und $f(x) = \exp^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$ definierte Funktion f ist überall unendlich oft differenzierbar, wobei für jede natürliche Zahl n gilt: $f^{(n)}(0) = 0$; daher ist $p_n(x) = 0$ für jedes x und jedes n .



4 Die Integralform des Satzes von Taylor

4.1 Satz von Lagrange

Voraussetzung: Es sei n eine natürliche Zahl und u, v auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ (n+1)-mal differenzierbare Funktionen.

Behauptung:

$$\text{a)} \quad \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i u^{(n-i)} v^{(i)} \right]' = u^{(n+1)} v + (-1)^n u v^{(n+1)}$$

$$\text{b)} \quad \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i u^{(n-i)} v^{(i)} \right]_a^b = \int_a^b u^{(n+1)}(x) \cdot v(x) \mathrm{dx} + (-1)^n \int_a^b u(x) v^{(n+1)}(x) \mathrm{dx}$$

Beweis :

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i u^{(n-i)} v^{(i)} \right]' &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i u^{(n-i)} v^{(i+1)} \\
&= u^{(n+1)} v + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i u^{(n-i)} v^{(i+1)} + (-1)^n u v^{(n+1)} \\
&= u^{(n+1)} v + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} u^{(n-i+1)} v^{i} + (-1)^n u v^{(n+1)}
\end{aligned}$$

Da die beiden Summen in der Mitte des letzten Ausdrucks entgegengesetzt gleich sind, folgt Teil a der Behauptung. Und aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich damit die Richtigkeit von Teil b der Behauptung.

4.2 Die Integralform des Restglieds

Ist nun f eine über $[a, b]$ (n+1)-mal stetig differenzierbare Funktion und $u := f, v(x) := \frac{(b-x)^n}{n!}$, so gilt $(-1)^i v^{(i)} = \frac{(b-x)^{n-i}}{(n-i)!}$ für $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Für die Funktion v hat man:

$$(-1)^n v^{(n)}(x) \equiv 1, \quad v^{(n+1)}(x) \equiv 0, \quad v^{(i)}(b) = 0 \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$$

Durch Einsetzen in Teil b des Satzes von Lagrange ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=0}^{n} f^{(n-i)}(x) \frac{(b-x)^{n-i}}{(n-i)!} \right]_a^b &= \int_a^b f^{(n+1)}(x) \cdot \frac{(b-x)^n}{n!} \mathrm{dx}, \quad \text{also} \\
f(b) - \sum_{i=0}^{n} f^{(n-i)}(a) \frac{(b-x)^{n-i}}{(n-i)!} &= \int_a^b f^{(n+1)}(x) \cdot \frac{(b-x)^n}{n!} \mathrm{dx} \\
\text{und somit} \quad f(b) &= \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a) \frac{(b-x)^i}{i!} + \int_a^b f^{(n+1)}(x) \cdot \frac{(b-x)^n}{n!} \mathrm{dx} .
\end{aligned}$$

$\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (b-x)^i$ ist aber gerade der Wert des n-ten Schmiegepolynoms zu f, entwickelt an der Stelle a für das Argument b:

$$f(b) = p_n(b) + \int_a^b f^{(n+1)}(x) \cdot \frac{(b-x)^n}{n!} \mathrm{dx}, \quad \text{für variables } b:$$

$$f(x) = p_n(x) + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{dt} \qquad .$$

Als Restglied r_n $(= f(x) - p_n(x))$ ergibt sich damit: $r_n = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{dt}$.

4.3 Andere Restgliedformen

Auf die Integralform des Restglieds

$$r_n = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{dt} = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^{n-k}}{n!} \cdot (x-t)^k\ \mathrm{dt}$$

in der zuletzt dargestellten Form darf der Mittelwertsatz der Integralrechnung angewendet werden, da der Faktor $(x-t)^k$ im Integrationsintervall keinen Vorzeichenwechsel hat. Es gibt also (in Abhängigkeit von k) eine Stelle c im offenen Intervall $]a, x[$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^{n-k}}{n!} \cdot (x-t)^k\ \mathrm{dt} &= f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x-c)^{n-k}}{n!} \cdot \int_a^x (x-t)^k\ \mathrm{dt} \\ &= f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x-c)^{n-k}}{n!} \cdot \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

Je nach Wahl von k erhält man jetzt die verschiedenen Restgliedformen:

$$\begin{aligned} k = 0: \qquad r_n(x) &= f^{(n+1)}(c)\, \frac{(x-c)^n}{n!}(x-a) \\ k = n: \qquad r_n(x) &= f^{(n+1)}(c)\, \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{(Lagrange)} \end{aligned}$$

Hinweis: Die Herleitung des Restglieds nach Lagrange unter Verwendung des verallgemeinerten Satzes von Rolle kommt, wie die Herleitung weiter oben zeigte, mit etwas reduzierten Voraussetzungen aus: Die Stetigkeit der (n+1)-ten Ableitung von f an den Randstellen des betrachteten Intervalls $[a, b]$ braucht nicht vorausgesetzt zu werden.